Gedämpfte harmonische Schwingungen

Barbara Herzog und Kim Holm

7. Juni 2013

1 Erinnerung an den ungedämpften harm. Oszillator

Das lineare Kraftgesetz $F(x) = -kx$ mit der Federkonstanten k liefert für den harmonischen Oszillator:

die lineare homogene Differentialgleichung:

$$m\ddot{x} = -kx \longrightarrow \ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_o^2 = \frac{k}{m} \tag{1}$$

die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{i\omega_o^2} + Be^{-\omega_o t} \ , \quad \text{wobei } B = A^* \qquad (2) \\ &= c_1 \cos(\omega_o t) + c_2 \sin(\omega_o t) \\ &= a \cos(\omega_o t - \varphi_o) \\ &= Re\{Ae^{i\omega_o t}\} \quad \text{mit} \quad A = ae^{-i\varphi_o} \end{aligned}$$

Die 2 Anfangsbedingungen sind entweder Amplitude a und Phasenverschiebung φ_0 oder Ort und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$. Für Anfangsbedingungen:

$$x(0) = x_0 \ , \quad \dot{x}(0) = v_0 \tag{3}$$

$$\Longrightarrow \quad x(t) = x_o \cos(\omega_o t) + \frac{v_o}{\omega_o} \sin(\omega_o t) \tag{4}$$

Im Ergebnis erhält man die Lösung des Anfangswertproblems.
Die Konstanten $c_1,\ c_2$ und a, φ_o hängen hier wie folgt zusammen

$$\begin{aligned} c_1 &= a \cos \varphi_o & \qquad c_1^2 + c_2^2 &= a^2 \qquad (5) \\ c_2 &= a \sin \varphi_o & \qquad \tan \varphi_o &= c_2 / c_1 \end{aligned}$$

2 Gedämpfter harm. Oszillator (Stokes'sche Reibung)

$$m\ddot{x} = -kx \underbrace{-r\dot{x}}_{\vec{F_R}=-r\vec{v}} \tag{6}$$

$$\text{mit } r = 2m\beta \text{ oder } r = m\gamma$$

$$0 = \ddot{x} + \underbrace{2\beta}_{\gamma}\,\dot{x} + \omega_o^2 x \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_o^2 = 0 \qquad \textit{charakteristische Gleichung} \tag{9}$$

$$\lambda_{1/2} = -\beta \pm \sqrt{\underbrace{\beta^2 - \omega_o^2}_{\text{Diskriminante}}} \tag{10}$$

$$\longrightarrow \quad \text{Diskriminante macht Fallunterscheidung notwendig}$$

2.1 Schwingfall: $\omega_o > 0$

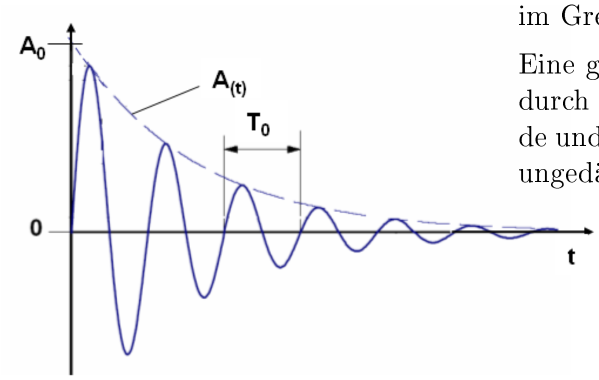
Nebenrechnung:

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2} = \sqrt{(-1)} * \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2} = i\,\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2} \tag{11}$$

$$=: i\,\omega \longrightarrow \text{Frequenz des gedämpften Systems } \omega < \omega_o \tag{12}$$

Merke: Ein gedämpftes System schwingt immer langsamer als ein ungedämpftes!

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t},\ B = A^* \\ &= e^{-\beta t}(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) \ \text{ mit } \ \omega^2 = \omega_o^2 - \beta^2 \\ &= e^{-\beta t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) \\ &= e^{-\beta t}\left(x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_o + x_o\beta}{\omega}\sin(\omega t)\right) \ \text{ für Anfangsbed. (3)} \\ &= \underbrace{a\,e^{-\beta t}}_{\text{exp. abnehmende Amplitude}} \cos(\omega t - \varphi_o) \end{aligned} \tag{13}$$



Man beachte die Analogie zur Lösung des harmonischen Oszillators ohne Dämpfung, die sich im Grenzfall $\beta \rightarrow 0$ ergibt.

Eine gedämpfte Schwingung ist charakterisiert durch eine exponentiell abnehmende Amplitude und eine kleinere Frequenz im Vergleich zum ungedämpften System!

Hinweis: Die Fallunterscheidung liefert weitere Lösungen:

- aperiodischer Grenzfall, Diskriminante $= 0$
- Kriechfall, Diskriminante > 0

Dies sind rein reelle Lösungen.

2.2 Aperiodischer Grenzfall: $\beta = \omega_o$ (Diskriminante =0)

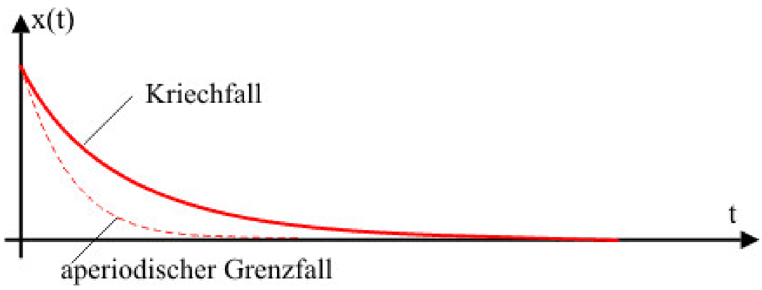
Der aperiodischer Grenzfall kennzeichnet die kritische Dämpfung, ab der keine Schwingung mehr möglich ist. Es ergeben sich entartete Wurzeln $\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$. Die Theorie der Differentialgleichungen liefert dazu die Lösung mit freien Konstanten $c_1,\ c_2$

$$x(t) = c_1 e^{-\beta t} + c_2\, t\, e^{-\beta t} = (c_1 + c_2\, t)\ e^{-\beta t} \tag{14}$$

2.3 Kriechfall: $\beta > \omega_o$

Die Lösung besteht aus zwei Exponentialfunktionen mit den reelen Wurzeln λ_1, λ_2.

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{15}$$



Hinweis: Es lässt sich zeigen, dass der aperiodische Grenzfall am schnellsten abklingt.