Der Exponentialansatz zur Lösung der linearen, homogenen Dgl. 2. Ordnung

Lukas Geiling, Martin Wagener (Dr. W. Seifert)

[b] *Institute of Physics, University Halle-Wittenberg, D-06099 Halle, Germany*

6. März 2014

Die Theorie der Differentialgleichungen besagt, dass jede homogene, lineare Dgl. (n-ter Ordnung) mit konstanten Koeffizienten eine Lösung in Form einer Exponentialfunktion hat.

Wir untersuchen hier als Beispiel die lineare, homogene Dgl. zweiter Ordnung mit dem Lösungsansatz $x(t) = c\, e^{\lambda t}$:

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = 0 \tag{1}$$
$$x(t) = ce^{\lambda t} \tag{2}$$
$$\dot{x}(t) = \lambda\, ce^{\lambda t} \tag{3}$$
$$\ddot{x}(t) = \lambda^2\, ce^{\lambda t} \tag{4}$$

Einsetzen von (2) – (4) in (1) ergibt

$$\lambda^2\, ce^{\lambda t} + a_1\lambda\, ce^{\lambda t} + a_0\, ce^{\lambda t} = 0 \qquad |: ce^{\lambda t} \tag{5}$$
$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \tag{6}$$

Das Fundamentalsystem der Lösung besteht somit aus den beiden Partikulärintegralen

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\ , \quad x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}\ . \tag{7}$$

Für lineare Dgln. gilt das Superpositionsprinzip, d.h. die Summe beider Lösungen mit 2 freien Konstanten c_i ist auch eine Lösung der Dgl. Die allgemeine Lösung von (1) lautet damit:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{8}$$

Die Diskriminante $D = \frac{a_1^2}{4} - a_0$ entscheidet über die genaue Form der Lösung; es ist eine Fallunterscheidung notwendig.

Fallunterscheidungen

i) Eine positive Diskriminante $D = \frac{a_1^2}{4} - a_0 > 0$ liefert reelle Wurzeln λ_i.

Beipiel: $$\ddot{x} + 6\dot{x} + 5x = 0 \tag{9}$$

Wir lösen die Dgl. wie oben beschrieben:

$$\lambda^2\, c\, e^{\lambda t} + 6\lambda\, ce^{\lambda t} + 5\, ce^{\lambda t} = 0 \qquad |: ce^{\lambda t} \tag{10}$$
$$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0 \tag{11}$$
$$\lambda_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 5} = \ -1/\ -5 \tag{12}$$

Die allgemeine Lösung der Dgl. (9) lautet damit:

$$x(t) = c_1 e^{-1t} + c_2 e^{-5t} \ . \tag{13}$$

Die freien Konstanten c_1, c_2 werden aus den Anfangsbedingungen ermittelt, vorgegeben werden z.B. Ort $x(0) = x_o$ und Geschwindigkeit $\dot{x}(0) = v_o$.

Ergänzung: Eine alternative Darstellung der Lösung ist mit den Hyperbelfunktionen möglich. Wir erinnern an

$$\sinh\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$$

und schreiben die Lösung wie folgt um ($e^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}t} = e^{-3t}$ wird ausgeklammert):

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-1t} + c_2 e^{-5t} && (14)\\ &= e^{-3t}(c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}) && (15) \end{aligned}$$

Wir führen jetzt andere freie Konstanten k_i wie folgt ein:
$k_1 = c_1 + c_2$ und $k_2 = c_1 - c_2 \iff c_1 = \frac{k_1+k_2}{2}$ und $c_2 = \frac{k_1-k_2}{2}$
und erhalten damit:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-3t}\left(\frac{k_1+k_2}{2}e^{2t} + \frac{k_1-k_2}{2}e^{-2t}\right) && (16)\\ &= e^{-3t}\left(\frac{k_1e^{2t} + k_2e^{2t} + k_1e^{-2t} - k_2e^{-2t}}{2}\right) && (17)\\ &= e^{-3t}\left(k_1\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2} + k_2\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\right) && (18)\\ x(t) &= e^{-3t}(k_1\cosh(2t) + k_2\sinh(2t)) && (19) \end{aligned}$$

Anwendung:
Die Dgl. (9) beschreibt die Bewegung eines gedämpften harmonischen Oszillators mit großer Dämpfung. In diesem Fall, der auch als *Kriechfall* bezeichnet wird, ist die Diskriminante $D > 0$, also $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und es tritt keine Schwingung auf.

ii) Eine negative Diskriminante $D = \frac{a_1^2}{4} - a_0 < 0$ führt auf komplexe Wurzeln.

$$\text{Beipiel :} \qquad \ddot{x} + 6\dot{x} + 18x = 0 \tag{20}$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 18 = 0 \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -3 \pm \sqrt{9-18}\\ &= -3 \pm 3i && (22) \end{aligned}$$

Einsetzen der komplexen Wurzeln λ_1, λ_2 liefert die allgemeine Lösung der Dgl.

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{(-3+3i)t} + Be^{(-3-3i)t} && (23)\\ &= e^{-3t}(Ae^{3it} + Be^{-3it}) && (24) \end{aligned}$$

Diese komplexe Form der Lösung für $x(t)$ erfordert die Bedingung $A^* = B$, damit sie in eine reelle Darstellung der Bahnkurve umgeschrieben werden kann.[1]

[1] Hintergrund ist die Tasache, dass die Summe aus einer komplexen und einer konjugiert komplexen Funktion eine reelle Funktion ergibt.

Dazu verwenden wir die Eulersche Formel $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$.

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-3t}(A(\cos(3t) + i\sin(3t)) + B(\cos(-3t) + i\sin(-3t))) && (25)\\ &= e^{-3t}(A(\cos(3t) + i\sin(3t)) + B(\cos(3t) - i\sin(3t))) && (26)\\ &= e^{-3t}((A+B)\cos(3t) + i(A-B)\sin(3t)) && (27) \end{aligned}$$

Die Bedingung $A^* = B$ liefert für die Real- bzw. Imaginärteile (Index r bzw. i).

$$\begin{aligned} A &= A_r + iA_i && (28)\\ B &= A_r - iA_i && (29) \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass gilt: $(A+B) = 2A_r$ und $(A-B) = 2\,i\,A_i$.
Damit erhält man eine reelle Lösungsdarstellung in der Form

$$x(t) = e^{-3t}(2\,A_r\ \cos(3t) - 2\,A_i\ \sin(3t)) \tag{30}$$

Da die freien Konstanten beliebig sind, schreibt man üblicherweise mit $c_1 = 2\,A_r$ und $c_2 = -2\,A_i$:

$$x(t) = e^{-3t}(c_1\ \cos(3t) + c_2\ \sin(3t)) \tag{31}$$

Eine zweite relle Darstellung ergibt sich nach Anwendung des Additionstheorems $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\ \ \cos\beta \mp \sin\alpha\ \ \sin\beta$.
Dabei setzen wir hier $c_1 = a\ \cos\varphi_o$ und $c_2 = a\ \sin\varphi_o$ und erhalten

$$x(t) = e^{-3t}(a\cos\varphi_o\cos(3t) + a\sin\varphi_o\sin(3t)) = e^{-3t}a\cos(3t - \varphi_o) \tag{32}$$

Anwendung:
Die Dgl. mit einer Diskriminante < 0 beschreibt den Schwingfall eines gedämpften harmonischen Oszillators.

iii) Verschwindende Diskriminante $D = \frac{a_1^2}{4} - a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Entartungsfall

Beipiel: $\quad \ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0 \qquad (33)$

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 6\lambda + 9 &= 0 && (34)\\ \lambda_{1,2} &= -3 \pm \sqrt{9-9} && (35)\\ \lambda_1 = \lambda_2 &= -3 && (36) \end{aligned}$$

$x_1(t) = e^{-3t}$ ist eine erste Teil-Lösung der Dgl.
Für die zweite Lösung machen wir einen Produktansatz mit einer noch unbekannten Funktion $\eta(t)$:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1(t)\ \eta(t) && (37)\\ \dot{x}_2(t) &= \dot{x}_1(t)\eta(t) + x_1(t)\dot{\eta}(t) && (38)\\ \ddot{x}_2(t) &= \ddot{x}_1(t)\eta(t) + 2\dot{x}_1(t)\dot{\eta}(t) + x_1(t)\ddot{\eta}(t) && (39) \end{aligned}$$

$x_2(t)$ soll die Dgl. lösen (Einsetzen von (37),(38) und (39) in (33)), und $x_1(t)$ ist bereits Lösung von (33). Die konkrete Rechnung liefert:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t)\eta(t) + 2\dot{x}_1(t)\dot{\eta}(t) + x_1(t)\ddot{\eta}(t) + 6(\dot{x}_1(t)\eta(t) + x_1(t)\dot{\eta}(t)) + 9x_1(t)\ \eta(t) &= 0 && (40)\\ 9e^{-3t}\eta(t) - 6e^{-3t}\dot{\eta}(t) + e^{-3t}\ddot{\eta}(t) - 18e^{-3t}\eta(t) + 6e^{-3t}\dot{\eta}(t) + 9e^{-3t}\ \eta(t) &= 0\\ \ddot{\eta}(t)e^{-3t} + \dot{\eta}(t)(6e^{-3t} - 6e^{-3t}) + \eta(t)(9e^{-3t} - 18e^{-3t} + 9e^{-3t}) &= 0\\ \ddot{\eta}(t)e^{-3t} &= 0\\ \ddot{\eta}(t) &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung der Dgl. $\ddot{\eta}(t) = 0$ ist $\eta(t) = t$ (freie Konstanten spielen erst bei der allg. Lösung eine Rolle). Das zweite Partikulärintegral ist damit gefunden:

$$\Rightarrow \; x_2(t) = t\, x_1(t)$$

und die allgemeine Lösung im Entartungsfall lautet damit

$$x(t) = (c_1 + c_2\, t)\, e^{-3t} \tag{41}$$

Hinweis:
Unabhängig vom konkreten Beispiel ist das Ergebnis allgemein gültig im Entartungsfall!

Anwendung:
Beim gedämpften harmonischen Oszillator spricht man vom aperiodischen Grenzfall. Es kann gezeigt werden, dass diese Lösung am schnellsten abklingt!