Punktmasse im Raum: Erhaltungssätze

Felix Teske, Maximilian Paleschke, Tobias Kaffka, Michael Beyer (Dr. W. Seifert)

8. November 2013

Die Grundaufgabe der Mechanik hinsichtlich der Bewegung eines Massenpunktes m im dreidimensionalen Ortsraum besteht darin, bei gegebener Kraft $\vec{F}$ die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ durch Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

mit Anfangsbedingungen $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_o$ und $\dot{\vec{r}}(t=0) = \vec{v}_o$ zu finden. Findet die Bewegung ohne weitere Zwangsbedingungen (z.B. Bewegung auf einer vorgeg. Kurve oder Fläche) statt, handelt es sich damit um ein Problem mit 3 Freiheitsgraden.

Im $\mathbb{R}^3$ sind direkte Integrationsstrategien zur Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung kaum möglich, weil es sich in der Regel um ein gekoppeltes System von 3 skalaren Differentialgleichungen mit 6 Anfangsbedingungen handelt. Eine erfolgreiche Strategie basiert auf sogenannten Erhaltungsgrößen.

Definition: *Eine physikalische Größe ist eine Erhaltungsgröße, wenn sie sich im Zeitablauf der Bewegung nicht ändert.*

Über den Bereich der Mechanik hinaus ist von Interesse, unter welchen Bedingungen Impuls, Drehimpuls und Energie Erhaltungsgrößen sind.

1 Impulserhaltung

Für den Impuls gilt $\vec{p} = m\vec{v}$.
Der Impulserhaltungssatz besagt, dass der Gesamtimpuls in einem abgeschlossenen System konstant ist.[1] Aus dem zweiten Newton'schen Axiom folgt für die Impulsänderung:

$$\dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\vec{p}} = \vec{F}\ .$$

Befindet man sich in einem abgeschlossenen System, d.h. wirken keine Kräfte auf das System von außen ein, dann gibt es für jede Kraft eine gleich große Gegenkraft (drittes Axiom):

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \sum_i \vec{F}_i = \dot{\vec{p}} = 0$$

Als Beispiel betrachten die Paarwechselwirkung zweier Massepunkte P und Q : Dabei möge Q auf P die Kraft $\vec{F}$ ausüben, die P mit $\ddot{\vec{r}_p} = \frac{\vec{F}}{m_p}$ beschleunigt. Nach dem 3. Newtonschen Axiom, dem Reaktionsprinzip, erfährt Q infolgedessen die Kraft $-\vec{F}$, die Q mit $\ddot{\vec{r}_q} = -\frac{\vec{F}}{m_q}$ beschleunigt. Es ist also $m_p\ddot{\vec{r}_p} + m_q\ddot{\vec{r}_q} = \vec{F} + (-\vec{F}) = 0$.

[1] Beim Billard entspricht z.B. der Gesamtimpuls vor dem Stoß dem Gesamtimpuls nach dem Stoß.

Als weiteres interessantes Beispiel sei die Raketengleichung von Konstantin Ziolkowski angeführt. Sie beschreibt die grundlegende Gesetzmäßigkeit des Raketenantriebs durch kontinuierlichen Anstoß von Stützmasse (die Raketenmasse ist also nicht konstant, sondern nimmt mit der Zeit ab). In einem abgeschlossenes System ist aber der Gesamtimpuls von Rakete und Stützmasse Null:

$$d\vec{p} = d(m\vec{v}) + (-dm)(\vec{v} - \vec{v_g}) = md\vec{v} + dm\vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{v} = -\vec{v}_g \frac{dm}{m}$$

$\vec{v}_g$ ... Geschwindigkeit, mit der die Stützmasse ausgestoßen wird.

Durch unbestimmte Integration und die Anfangsbedingung $\vec{v}(m = m_0) = 0$ (wobei m_0 die Anfangsmasse der Rakete ist) ensteht Ziolkowski's Raketengleichung:

$$\vec{v}(m) = \vec{v}_g \; ln \tfrac{m_0}{m}$$

Sie gibt die Geschwindigkeit einer Rakete im Vakuum ohne Gravitationseinfluss in Abhängigkeit von der Restmasse m (die um den verbrauchten Treibstoff verkleinerte Anfangsmasse) an. Lit.: A. Budo: Theoretische Mechanik, Paragraph 45. Verlag der Wiss., Berlin 1969.

2 Drehimpulserhaltung

Def.: Drehimplus: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, Drehmoment: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Es gilt: $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ (Grundgesetz der allgemeinen Drehbewegung)

$\vec{L}$ ist eine Erhaltungsgröße (d.h. $\vec{L} = \vec{const.}$) wenn $\dot{\vec{L}} = 0$.

Beweis:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F} \qquad\qquad | \times\vec{r} \qquad (1) \\ m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ \Rightarrow \underbrace{m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} &= \vec{r} \times \vec{F} \end{aligned}$$

beachte: $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$ da zwei gleiche Vektoren im Kreuzprodukt (also Null addiert)
Wir fassen die beiden Terme auf der linken Seite als Zeitableitung zusammen:

$$\begin{aligned} \text{(Produktregel)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &\Updownarrow \\ \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \underbrace{m\dot{\vec{r}}}_{m\vec{v}=\vec{p}}) &= \vec{r} \times \vec{F} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) &= \vec{r} \times \vec{F} \\ \dot{\vec{L}} &= \vec{M} \end{aligned}$$

Folgerung 1:

$\dot{\vec{L}} \neq 0$ wenn $\vec{r}$ und $\vec{p}$ bzw. $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ nicht parallel sind. $\Rightarrow$ allgemeine Drehbewegung

Folgerung 2:

$\dot{\vec{L}} = 0$ bzw. $\vec{M} = 0$ $\Rightarrow$ trivialer Fall: $\vec{F} = 0$

$\Rightarrow$ nichttrivialer Fall: $\vec{F} \parallel \vec{r}$, dann $\vec{r} \times \vec{F} = 0$!

Def.: *Zentralkräfte sind Kräfte, deren Wirkungsweise auf das Zentrum (z.B. den Koordinatenursprung) gerichtet sind.*

$\Rightarrow \quad \vec{F} \parallel \vec{r}$ gilt allgemein für Kräfte der Struktur $\vec{F} = f(r, \dot{r}, t) \cdot \vec{e}_r$ mit $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$

In der Physik sind 2 Zentralkräfte von besonderer Bedeutung:

Gravitationskraft: $\vec{F}_{\text{Grav}} = -G\dfrac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$

Coulombkraft: $\vec{F}_{\text{Coul}} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \dfrac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$

Beide Kräfte sind von der Struktur: $\vec{F} = \dfrac{\kappa}{r^2}\vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad |\vec{F}| \sim \dfrac{1}{r^2}$

Unterscheidung: $\vec{F}_{\text{Grav}}$ ist rein attraktiv, $\vec{F}_{\text{Coul}}$ ist je nach Vorzeichen der beiden Ladungen abstoßend bzw. anziehend.

Die Konsequenz der Drehimpulserhaltung:

Bei Zentralkräften gilt: $\dot{\vec{L}} = 0 \quad \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_o = \vec{const}.$

Damit können 3 Integrationskonstanten vorgegeben werden. Auf Grund der Definition des Drehimpulses können das z.B. $\vec{r}_o$ und $\vec{v}_o$ zur Zeit $t = 0$ sein.

beachte: $\vec{L}_o = m\vec{r} \times \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_o$ steht senkrecht auf der Ebene von $\vec{r}$ und $\vec{v}$.

Folgerung: Die Drehimpulserhaltung hat eine ebene Bewegung im Raum zur Folge. Es handelt sich oft um eine allgemeine Drehbewegung. die dann bevorzugt in Polarkoordinaten ausgewertet wird.

Polarkoordinaten $\{\rho, \phi\} \quad \Longrightarrow \quad$ Ortsvektor $\vec{r} = \rho \; \vec{e}_\rho(\phi)$

$\vec{r} = \rho \; \vec{e}_\rho(\phi)$

$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \; \vec{e}_\rho(\phi) + \rho \; \dot{\phi} \; \vec{e}_\phi \quad$ (mit $\frac{d}{dt}\vec{e}_\rho = \dot{\phi} \; \vec{e}_\phi$)

$\vec{L}_o = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m \, \rho^2 \, \dot{\phi} \, \vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad$ Flächensatz: $\rho^2 \, \dot{\phi} = \text{const.}$!

3 Energieerhaltung

Wir gehen wieder vom 2. Newtonschen Axiom aus ($m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$) und verallgemeinern den 1D Fall:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F} \qquad | \cdot \dot{\vec{r}} \\
\Rightarrow \quad m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} &= \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})\right) &= \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Eine Nebenrechnung verdeutlicht diesen Zusammenhang:

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right) = m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = m\,\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \tag{3}
$$

Somit ergibt sich Gleichung (2)

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \quad \text{mit der kinetischen Energie } T = \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}})^2 = \frac{(\vec{p})^2}{2m} \,. \tag{4}
$$

Um die Energieerhaltung zu zeigen, untersuchen wir noch die Zeitableitung des Potentials

$$
\frac{dU(\vec{r})}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)}_{\text{Gradient von U}} \cdot \dot{\vec{r}} = grad\; U \cdot \dot{\vec{r}}
$$

Fazit:

Falls also $\vec{F} = -grad\ U$ gilt, so ergibt sich:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}(\dot{\vec{r}})^2\right) = -\frac{dU}{dt} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt}(T+U) = \dot{E} = 0 \tag{5}$$

Somit ergibt sich der Satz von der Erhaltung der Energie: $T + U = E_0$

Merke:

Kräfte, die aus einem Potential durch Gradientenbildung berechnet werden, heißen konservative Kräfte. Sie genügen der Bedingung $\nabla \times \vec{F} = 0$ (wegen $rot\,grad \equiv 0$). Für konservative Kräfte gilt der mechanische Energieerhaltungssatz.

Folgerung:

Für konservative Zentralkräfte sind also die Gesamtenergie E_0 und der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}_o$ Erhaltungsgrößen. Beim Lösen von mechanischen Problemen mit Energie- und Drehimpulserhaltung sind somit 4 Integrationskonstanten abgebbar (siehe abschliessende Bemerkung).

Nicht alle Kräfte sind rein konservativ. Es gilt der 'Zerlegungssatz':

$$\vec{F} = \vec{F}_{Kons} + \vec{F}_{\mathrm{Diss}}$$

Dissipative Kräfte sind z.B. Reibungskräfte. Diese können nicht durch Gradientenbildung aus einem Potential berechnet werden. Dann gilt ein verallgemeinerter Energiesatz in der Form:

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \vec{F}_{Diss} \cdot \dot{\vec{r}} \tag{6}$$

Die zeitliche Änderung der mechanischen Energie ist gleich der Leistung der dissipativen Kräfte.

Dim.: $[\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}\,] = N \cdot \frac{m}{s} = \frac{Nm}{s}$ (eigentlich Leistungssatz !)

Abschliessende Bemerkung:

Im eindimensionalen Fall erhält man aus dem Energiesatz durch *Trennung der Variablen* sofort die (inverse) Bahnkurve $t(x)$. Beispiele sind: Bewegung im homogenen Schwerefeld und 1D harmonischer Oszillator.
Im dreidimensionalen Fall ist dies nicht mehr so, weil mit der Aufstellung des Energiesatzes nur eine von 6 Integrationskonstanten festgelegt ist: Wenn aber der Drehimpulsvektor ($\vec{L}_o$) und die Energie (E_o) erhalten sind, dann sind 4 von 6 Integrationskonstanten vorgebbar. Es ergibt sich eine ebene Bewegung im Raum. Die Bewegung im Gravitations- und Coulombfeld erfolgt auf Kegelschnitten. Die Kegelschnittgleichung kann aus den beiden Erhaltungssätzen abgeleitet werden.