Modulklausur THEORIE A SS 2011

ERLAUBT SIND: 1 DinA4-Blatt Zusammenfassung
BITTE JEDE AUFGABE AUF EINEM SEPARATEN BLATT LÖSEN
UND ALLE AUFGABENBLÄTTER ABGEBEN! (**Name, Vorname angeben!**)

Aufgabe 1 (5 P)

Ein Stein wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_o mit einem Winkel φ_o zur Horizontalen schräg nach oben geworfen.

a) Geben Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung sowie deren Komponenten in der Ebene der Bewegung an (wählen Sie die x-z-Ebene).

b) Nehmen Sie an: $x(0) = 0$ und $z(0) = 0$. Bei welchem Wert x_e erreicht der Stein wieder seine Starthöhe? Bei welchem Winkel φ_{opt} wird x_e maximal?

Aufgabe 2 (6 P)

Gegeben sei ein ungedämpfter, eindimensionaler harmonischer Oszillator (Masse m, Federkonstante k), an dem für $t \geq 0$ eine konstante äußere Kraft F_o angreift. Für $t \leq 0$ befindet sich der Oszillator in seiner Gleichgewichtslage und in Ruhe, d.h. es gilt insbesondere:

$$\dot{x}(t=0) = 0 \qquad \text{und} \qquad x(t=0) = 0$$

a) Formulieren Sie die Differentialgleichung des Problems und berechnen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ für $t > 0$. Beachten Sie dabei, dass es sich um eine inhomogene Differentialgleichung handelt (Variation der Konstanten ist NICHT erforderlich)!

b) Bestimmen Sie die freien Konstanten aus den Anfangsbedingungen. Zeichnen Sie $x(t)$ auf.

Aufgabe 3 (6 P)

Für die Bewegung auf einer Archimedischen Spirale gilt die Darstellung :

$$x(t) = a\,t\,\cos\varphi(t) \quad , \quad y(t) = a\,t\,\sin\varphi(t) \quad .$$

a) Berechnen Sie die kartesischen Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$ sowie den Betrag der Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$.

b) In ebenen Polarkoordinaten $\{\rho, \varphi\}$ lautet die Darstellung für die Einheitsvektoren

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} .$$

Geben Sie den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ der Spirale in Polarkordinaten an und berechnen Sie mit Hilfe der Ableitungen der Einheitsvektoren $\frac{d}{dt}\vec{e}_\rho$, $\frac{d}{dt}\vec{e}_\varphi$ die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{a}$, ausgedrückt in den ebenen Polarkoordinaten (sowie den Einheitsvektoren $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$). Vergleichen Sie die Beträge von v aus a) und b) !

Aufgabe 4 (6 P)

a) Geben Sie mindestens 3 Bedingungen an, die ein konservatives Kraftfeld erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass das folgende Kraftfeld konservativ ist

$$F_x = a(y^2 + 2xz) \ , \quad F_y = a(2xy + z^2) \ , \quad F_z = a(x^2 + 2yz) \ , \quad a = const.$$

und berechnen Sie das zugehörige Potential $U(x, y, z)$.

c) Parametrisieren Sie das Wegintegral der Kraft $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ von $\{0, 0, 0\}$ nach $\{1, 1, 1\}$ entlang der Hauptdiagonalen für eine allgemeine Kraft $\vec{F} = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$.
Welches einfache Resultat erhält man für das konservative Kraftfeld aus b) ?

Aufgabe 5 (6 P)

Für kugelsymmetrische Probleme mit $r = |\vec{r}|$ sowie $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ gilt

$$\nabla U(r) = U'(r)\, \vec{e}_r \ .$$

Prüfen Sie durch Berechnung der Rotation der Kraftfelder, ob die Kraftfelder konservativ sind und berechnen Sie gegebenenfalls das zugehörige Potential $U(r)$

a) $\vec{F} = \frac{\alpha_o}{r^2}\, \vec{e}_r$ $\quad$ ($\alpha_o > 0$ ist konstant)

b) $\vec{F} = a\, r^2\, \vec{e}_r$ $\quad$ ($a > 0$ ist konstant)

Hinweis: Verwenden Sie den Nabla-Kalkül sowie ggf. den Entwicklungssatz

$$\nabla \times (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \times \vec{A} + \Phi\, (\nabla \times \vec{A}) \ .$$