Einführung in Theoretische Physik
Sommersemester 2007

Klausur am 18. Juli 2007

Dozenten: J. Kantelhardt und W. Seifert

Zugelassene Hilfsmittel: ausgeteiltes Formelblatt zu Koordinatensystemen und eine selbst mit Formeln beschriebene DIN A4 Seite.

Aufgabe 1: (8 Punkte)

Ein Teilchen der Masse $m = 1$ bewegt sich in einer Dimension unter Einwirkung der Kraft

$$F(x) = \frac{c_1}{x} - c_2 x^{3/2} = \frac{1}{x} - x^{3/2}; \qquad x > 0,$$

wobei zur Vereinfachung der Rechnung die Konstanten c_1 und c_2 gleich Eins gesetzt und die Einheiten weggelassen werden.

a) Berechnen Sie die Ruhelage x_0 des Teilchens; beachten Sie dabei den Wertebereich von x !

b) Wie lautet die potentielle Energie $U(x)$?
Geben Sie den Energiesatz für dieses Problem an !

c) Geben Sie die allgemeine Form der Taylorreihe bis zur 2. Ordnung für die Kraft $F(x)$ an, wenn um $x = x_0$ entwickelt wird.
Setzen Sie für x_0 den Wert aus a) ein. Wie lautet die Reihe dann konkret?

d) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen $x' = x - x_0$ des Teilchens aus der Ruhelage her, indem Sie die Taylor-Reihe nach der harmonischen Näherung (1. Ordnung für die Kraft) abbrechen!
Geben Sie eine relle Lösung für $x'(t)$ an!

Aufgabe 2: (9 Punkte)

Gegeben sei ein ungedämpfter, eindimensionaler harmonischer Oszillator (Masse m, Kreisfrequenz ω), an dem für $t \geq 0$ eine konstante äußere Kraft F_o angreift. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Oszillator in seiner Gleichgewichtslage und in Ruhe, d.h. es gilt:

$$\dot{x}\,(t = 0) = 0 \qquad \text{und} \qquad x(t = 0) = 0$$

a) Formulieren Sie die Differentialgleichung des Problems und berechnen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ für $t > 0$. Beachten Sie dabei, dass es sich um eine inhomogene Differentialgleichung handelt!

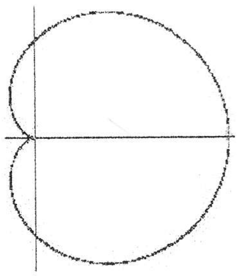
b) Bestimmen Sie die freien Konstanten aus den Anfangsbedingungen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der bekannten Lösung für den harmonischen Oszillator ohne äußere Anregung!

c) Leiten Sie den Energiesatz aus der Differentialgleichung her.
Ist die mechanische Gesamtenergie des Systems erhalten?

Aufgabe 3: (9 Punkte)

Ein Teilchen bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$ auf einer Herzkurve (oder 'Kardioide', cardis = Herz), die in Polarkoordinaten die folgende Darstellung hat:

$$r = k\,(1 + \cos\varphi)\ ;\quad 0 \leq \varphi < 2\pi\ ;\ k = const.$$



a) Für welche Winkel φ gilt $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{e}_r = 0$ bzw. $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{e}_\varphi = 0$?

b) Berechnen Sie die Zeitableitungen $\dot{r}$ und $\ddot{r}$ in Abhängigkeit von φ, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$.
Hinweis: Kettenregel $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$ verwenden !

c) Zeigen Sie, dass für die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ gilt

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{\sqrt{2kr}}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Konstanz von v und die Ausdrücke für r (wird zweimal gebraucht) sowie $\dot{r}$.

d) Schreiben Sie den Ortsvektor $\vec{r}$ und den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}$ in ebenen Polarkoordinaten (d.h. mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$) in Abhängigkeit von φ. Hinweis: Verwenden Sie $\dot{r}$ und $\dot{\varphi}$ aus b) bzw. c) !

Aufgabe 4: (8 Punkte)

a) Zeigen Sie durch Berechnung der Rotation, dass die folgende Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ ist, und berechnen Sie das zugehörige Potential $U(\vec{r})$:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left\{ ayz^2 + b,\quad axz^2 - 3cy^2\sqrt{z},\quad 2axyz - \frac{c}{2}y^3z^{-1/2} \right\}$$

b) Welche Erhaltungsgrößen gibt es für die Bewegung eines Massenpunktes im Potential (bitte mit kurzer Begründung):

$$U(\vec{r}, t) = a\cos(\omega t) + b(y^2 + z^2)\ ;\quad a, b, \omega = const.$$

c) Berechnen Sie für das skalare Potential $U(\vec{r}) = |\vec{r}|^3$ die Kraft $\vec{F} = -\nabla U$.
Bestimmen Sie auch $\triangle\, U(\vec{r}) = \nabla \cdot \nabla U$.
Hinweis: Schreiben Sie *nicht* in kartesische Koordinaten um, sondern verwenden Sie den Nabla-Kalkül !

Viel Erfolg!