Theoretische Physik A – Nachklausur Sommersemester 2008

24. September 2008, Dozent: J. Kantelhardt

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Schritte des Lösungswegs müssen klar erkennbar sein – ein Verweis auf Computeralgebra reicht nicht. Bearbeitungszeit: 2 Stunden. Zugelassene Hilfsmittel: eine selbst mit Formeln beschriebene DIN A4 Seite, Formelblatt Koordinatensysteme, mathematische Formelsammlung und Taschenrechner.

Aufgabe 1: (8 Punkte)

Der eindimensionale freie Fall mit Reibung wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\dot{v} + \gamma v = g \qquad \text{mit} \qquad v = \dot{x}\ ,$$

wobei die Erdbeschleunigung g in Richtung der x-Achse weist.

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = g\ ; \qquad x(0) = x_0\ ,\quad \dot{x}(0) = v_0$$

mit einem e-Ansatz und geben Sie $x(t)$ sowie $v(t)$ an!
Hinweis: Beachten Sie, dass die Differentialgleichung inhomogen ist.

(b) Zeigen Sie dass die mechanische Gesamtenergie mit der Zeit abnimmt!

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Auf ein Elektron mit Masse m und Ladung e_0 wirkt in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B_0\vec{e}_x$ die Kraft $\vec{F} = e_0(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) = e_0 B_0(\dot{\vec{r}} \times \vec{e}_x)$.

(a) Leiten Sie die drei Newtonschen Bewegungsgleichungen (Differentialgleichungen) in kartesischen Koordinaten ab!

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen aus Teil (a), d.h. bestimmen Sie die allgemeine Lösung für alle drei Komponenten von $\vec{r}(t)$.
Hinweis: Man kann die beiden gekoppelten Gleichungen trennen, indem man einmal ableitet und einsetzt. Beachten Sie, dass es letztendlich nicht mehr als 6 freie Parameter in der allgemeinen Lösung geben darf.

(c) Geben Sie konkrete Werte für die Parameter der Lösung an, für die sich das Elektron auf einer Kreisbahn um den Ursprung bewegt.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

(a) Gegeben sind zwei mathematische Pendel mit gleicher Masse m. Das erste Pendel hat eine Periode von $T_1 = 3$s, das zweite eine Periode von $T_2 = 4$s. Berechnen Sie die Periode T für ein mathematisches Pendel, dessen Länge l gleich der Summe der Längen $l_1 + l_2$ der beiden vorgegebenen Pendel und dessen Masse ebenfalls m ist.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Energiesatzes, mit welcher Geschwindigkeit v_0 ein ruhendes mathematisches Fadenpendel mindestens angestoßen werden muss, damit es auf einer Kreisbahn umläuft!
Hinweis: Die Geschwindigkeit muss im höchsten Punkt der Bahn größer als 0 sein.

Aufgabe 4: (8 Punkte)

(a) Zeigen Sie durch Berechnung der Rotation, dass die folgende Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ ist und berechnen Sie das zugehörige Potential $U(\vec{r})$:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left\{ ayz^2 + b, \quad axz^2 - 3cy^2\sqrt{z}, \quad 2axyz - \frac{c}{2}y^3 z^{-1/2} \right\}$$

(b) Welche Erhaltungsgrößen sind bei der Bewegung eines Massenpunktes im Potential

$$U(\vec{r}, t) = a\cos(\omega t) + b(y^2 + z^2); \quad a, b, \omega = const$$

konstant (bitte begründen).

(c) Berechnen Sie für das skalare Potential $U(\vec{r}) = |\vec{r}|^3$ die Kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$.
Bestimmen Sie auch $\triangle U(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U$.
Hinweis: Schreiben Sie *nicht* in kartesische Koordinaten um, sondern verwenden Sie den Nabla-Kalkül in Kugelkoordinaten!

Aufgabe 5: (8 Punkte)

Der Satz von Stokes liefert einen Zusammenhang zwischen einem geschlossenen Wegintegral (Linienintegral 2. Art) und einem Flächenintegral über die Fläche A, die von der "Hülle" ∂A berandet wird:

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int\!\!\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}$$

Zeigen Sie die Gültigkeit des Satzes von Stokes, indem Sie für folgende zwei Magnetfelder und Flächen jeweils beide Integrale berechnen und die Ergebnisse vergleichen!

(a) Magnetfeld $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$, Fläche A ist das Quadrat mit den Eckpunkten (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0) und (0,1,0) in der x-y-Ebene.

(b) Magnetfeld $\vec{B} = B_0\vec{e}_\varphi$ (in Zylinder- oder Kugelkoordinaten), Fäche A ist eine Kreisscheibe in der x-y-Ebene mit Radius R um den Ursprung.