

Aufgaben der Klausur "Klassische Mechanik" WS 16/17

1. (10 Punkte) Ein dreidimensionales klassisches System werde durch die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + q_1^2 + 2q_2^2 + 3q_3^2$ beschrieben, wobei q_i und p_i ($i = 1, 2, 3$) die generalisierten Koordinaten bzw. die generalisierten Impulse sind.

Kreuzen Sie an, welche Aussagen richtig sind.

Aussage	Ja	Nein
Die Energie ist zeitlich invariant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$p_1^2 + q_1^2$ ist zeitlich invariant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
p_2^2 ist zeitlich invariant	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$p_2^2 + q_1^2$ ist zeitlich invariant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Das System ist integrabel.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die Phasenraumtrajektorien sind geschlossen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Das System zeigt quasiperiodisches Verhalten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{p_1^2, p_2^2\} = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{p_1^2, q_2\} = 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\{p_1^2, q_1\} = 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2. (10 Punkte) Wir betrachten das System mit der Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ aus Aufgabe 1.
- Wie lautet die Lagrangefunktion \mathcal{L} ?
 - Wie lautet das Prinzip der stationären Wirkung.
 - Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen. (Anmerkung: Hier wurde nach einer allgemeinen Formulierung gefragt.)
 - Leiten Sie das 2. Newtonsche Gesetz für q_1 aus der Euler-Lagrange-Gleichungen her.
 - Ist die Transformation $Q_i = -2p_i, P_i = q_i/2$ kanonisch? Begründen Sie!
3. (12 Punkte) Am freien Ende einer an einem Punkt aufgehängten, masselosen Stange der Länge l ist ein Massepunkt der Masse M befestigt. Auf diesen Massepunkt wirkt die Schwerkraft mit der Erdbeschleunigung g . Die Stange ist in einer vertikalen Ebene um den Aufhängepunkt drehbar. Die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage werde durch den Winkel θ beschrieben.
- Stellen Sie die Lagrangefunktion als Funktion von θ und der dazugehörigen Geschwindigkeit $\dot{\theta}$ auf. Der Nullpunkt der potentiellen Energie soll so gewählt werden, dass $U(\theta = \pi/2) = 0$
 - Welche physikalische Bedeutung hat der zu θ kanonisch-konjugierte Impuls p_θ ? Geben Sie die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(\theta, p_\theta)$ an.

- (c) Welche Art der Bewegung wird bei einer Gesamtenergie $E < Mgl$ qualitativ vollzogen? Welche Art der Bewegung ergibt sich für $E > Mgl$?
 - (d) Zeichnen Sie in einem Phasenraumdiagramm Bahnen für die beiden in (c) genannten Fälle.
4. (4 Punkte) $A(q, p)$ sei eine Erhaltungsgröße der dynamischen Variablen q und p in einem eindimensionalen konservativen System mit der Hamiltonfunktion H .
- (a) Wie lautet die Änderung δB einer Observablen B unter einer infinitesimalen kanonischen Transformation, die von A generiert wird?
 - (b) Wann ist δB zeitlich erhalten und wann nicht? Begründen Sie