Klausur zur Experimentalphysik, Modul A

WS 2008/2009

Lösungsvorschlag

1.

Aufgabe 1: Die Bewegung des Teilchens kann in zwei Abschnitte unterteilt werden. In Abschnitt I bewegt sich das Teilchen gleichförmig. Damit ist die Zeit t_1 für diesen Abschnitt umso kürzer, je größer v_0 ist

$$s_1 = v_0 t_1 \tag{1.1}$$
$$t_1 = \frac{s_1}{v_0} \tag{1.2}$$

Im Abschnitt II wird das Teilchen mit einer konstanten Verzögerung a abgebremst. Je größer hier die Anfangsgeschwindigkeit v_0, desto größer ist die Bremszeit t_2. Allgemein gilt für die Geschwindigkeit v in diesem Abschnitt

$$v = at' + v_0, \tag{1.3}$$
$$\tag{1.4}$$

wenn t' die Zeit während des Bremsvorgangs ist (also t'=0 am Beginn von Abschnitt II). Am Ende des Bremsvorgangs bei $t' = t_2$ ist die Geschwindigkeit gleich Null

$$0 = at_2 + v_0 \tag{1.5}$$
$$t_2 = -\frac{v_0}{a} \tag{1.6}$$

Die Gesamtzeit t ergibt sich aus

$$t = t_1 + t_2 \tag{1.7}$$
$$= \frac{s_1}{v_0} - \frac{v_0}{a} \tag{1.8}$$

Um das Minimum zu bestimmen muss die 1. Ableitung nach v_0 gleich Null sein und die 2. Ableitung an dieser Stelle > 0 sein

$$\frac{d\,t}{d\,v_0} \stackrel{!}{=} 0 = -\frac{s_1}{v_0^2} - \frac{1}{a} \tag{1.9}$$
$$v_0 = \sqrt{-as_1} \tag{1.10}$$
$$= 1000\,\mathrm{ms}^{-1} \tag{1.11}$$
$$\frac{d^2\,t}{d\,v_0^2} = \frac{2s_1}{v_0^3} > 0 \tag{1.12}$$

Die 2. Ableitung ist für alle positiven s_1 und v_0 größer als Null. Es handelt sich also bei der Geschwindigkeit $v_0 = 1000\,\mathrm{ms}^{-1}$ um das Minimum der Gesamtzeit. Setzt man übrigens das Ergebnis (1.10) in die Gleichungen für die beiden Einzelzeiten (1.2, 1.6) ein, so erhält man

$$t_1 = \frac{s_1}{\sqrt{-as_1}} = \sqrt{\frac{s_1}{-a}} \tag{1.13}$$
$$t_2 = -\frac{\sqrt{-as_1}}{a} = \sqrt{\frac{s_1}{-a}} \tag{1.14}$$

Die Zeiten für die beiden Abschnitte sind bei minimaler Gesamtzeit also immer gleich!

Aufgabe 2: Auf den Körper wirken neben der ziehenden Kraft $\vec{F}$ noch die Hangabtriebskraft $\vec{F_H}$ sowie bei der Bewegung die Reibungskraft $\vec{F_R}$ mit

$$F_H = mg\,\sin\alpha \tag{1.15}$$
$$F_N = mg\,\cos\alpha \tag{1.16}$$
$$F_R = \mu F_N = mg\,\cos\alpha \tag{1.17}$$

Die beschleunigende Kraft $\vec{F_B}$ ist gleich der Summe aller wirkenden Kräfte

$$\vec{F_B} = \sum \vec{F_i} = \vec{F} + \vec{F_H} + \vec{F_R} \tag{1.18}$$
$$ma = 2mg - mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \tag{1.19}$$
$$a = g(2 - \sin\alpha - \mu\cos\alpha) \tag{1.20}$$

Die Beschleunigung $\vec{a}$ wirkt deshalb immer in Richtung von $\vec{F}$. Für das Minimum von α muss gelten

$$\frac{d\,a}{d\,\alpha} \stackrel{!}{=} 0 = g(-\cos\alpha + \mu\sin\alpha) \tag{1.21}$$
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \mu^{-1} \tag{1.22}$$
$$\text{mit } \mu = 1: \quad \alpha = 45^\circ \tag{1.23}$$

Um zu zeigen, dass es ein Minimum ist, wird die zweite Ableitung gebildet

$$\frac{d^2\,a}{d\,\alpha^2} = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \tag{1.24}$$
$$\text{für } \alpha = 45^\circ: \quad \frac{d^2\,a}{d\,\alpha^2} > 0 \tag{1.25}$$

Die minimale Beschleunigung hat bei einem Winkel vom 45° und $\mu = 1$ den Wert

$$a = g(2 - \sin 45^\circ - \mu\cos 45^\circ) \tag{1.26}$$
$$a = g(2 - \sqrt{2}) = 5{,}75\,\mathrm{ms}^{-2} \tag{1.27}$$

Aufgabe 3: Im Punkt A wirken die Zentrifugalkraft (Radialkraft) auf Grund der Kreisbewegung senkrecht nach oben sowie die Gewichtskraft der Kugel senkrecht nach unten. Damit die Kugel den Kontakt zur Rinne nicht verliert, muss die Zentrifugalkraft F_R größer oder gleich der Gewichtskraft F_G sein. Im Grenzfall der Gleichheit gilt

$$F_R = F_G \tag{1.28}$$
$$m\frac{v^2}{R} = mg \tag{1.29}$$
$$v = \sqrt{gR} \tag{1.30}$$

mit m - Masse der Kugel und v Bahngeschwindigkeit im Punkt A.

Im Startpunkt besitzt die Kugel nur potentielle Energie $E_{pot,H}$. Im Punkt A besitzt sie neben der potentiellen Energie $E_{pot,A}$ auch kinetische Energie $E_{kin,A}$. Aus dem Energieerhaltungssatz folgt

$$\begin{aligned}
E_{pot,H} &= E_{pot,A} + E_{kin,A} && (1.31)\\
mgH &= mg2R + \frac{m}{2}v^2 && (1.32)\\
H &= 2R + \frac{v^2}{2g} && (1.33)\\
\text{mit (1.30)} \qquad H &= 2R + \frac{R}{2} && (1.34)\\
H &= 2{,}5\,R && (1.35)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Der Wirkungsgrad ist definiert als der Quotient aus der verrichteten Arbeit und der zugeführten Wärme (Nutzen/Aufwand)

$$\eta = \frac{|W|}{Q_{zu}} \qquad (1.36)$$

Alternativ kann die Arbeit bei einem Kreisprozess natürlich auch durch die Summe aller Wärmemengen ersetzt werden, da die Summe aller Änderungen der inneren Energie beim Erreichen des Ausgangszustandes gleich Null ist

$$\begin{aligned}
\sum dU_i &= 0 = \sum(Q_i + W_i) && (1.37)\\
\sum Q_i &= |\sum W_i| && (1.38)
\end{aligned}$$

Somit kann der Wirkungsgrad auch mit

$$\eta = \frac{\sum Q_i}{Q_{zu}} \qquad (1.39)$$

berechnet werden. Zunächst werden die Temperaturen berechnet

$$\begin{aligned}
T_i &= \frac{p_i V_i}{nR} && (1.40)\\
T_1 &= 250K && (1.41)\\
T_2 &= 500K && (1.42)\\
T_3 &= 1000K && (1.43)\\
T_4 &= 500K && (1.44)
\end{aligned}$$

Die Wärmemengen ergeben sich bei den isochoren Zustandsänderungen aus

$$\begin{aligned}
Q_{ij} &= nC_V(T_j - T_i) && (1.45)\\
Q_{12} &= 5250\,\mathrm{J} && (1.46)\\
Q_{34} &= -10500\,\mathrm{J} && (1.47)
\end{aligned}$$

Für die isobaren Zustandsänderungen berechnen sich die Wärmemengen aus

$$\begin{aligned}
Q_{ij} &= nC_p(T_j - T_i) && (1.48)\\
Q_{23} &= 14500\,\mathrm{J} && (1.49)\\
Q_{41} &= -7250\,\mathrm{J} && (1.50)
\end{aligned}$$

Die zugeführte und abgegebene Wärme sowie die geleistete Arbeit betragen also

$$\begin{aligned}
Q_{zu} &= Q_{12} + Q_{23} = 19{,}75\,\mathrm{kJ} && (1.51)\\
Q_{ab} &= Q_{34} + Q_{41} = -17{,}75\,\mathrm{kJ} && (1.52)\\
W &= Q_{zu} + Q_{ab} = 2\,\mathrm{kJ} && (1.53)
\end{aligned}$$

Die Arbeit kann natürlich auch aus den Volumenarbeiten der isobaren Zustandsänderungen berechnet werden

$$W_{23} = p_2(V_2 - V_1) \tag{1.54}$$
$$W_{41} = p_1(V_1 - V_2) \tag{1.55}$$
$$W = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) \tag{1.56}$$
$$= 2\,\mathrm{kJ} \tag{1.57}$$

Damit beträgt der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{|W|}{Q_{12} + Q_{23}} \tag{1.58}$$
$$\eta = \frac{Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}}{Q_{12} + Q_{23}} \tag{1.59}$$
$$= 1 - \frac{Q_{34} + Q_{41}}{Q_{12} + Q_{23}} \tag{1.60}$$
$$= 0{,}101 = 10{,}1\% \tag{1.61}$$