Wiederholungsklausur Analysis I

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

3 Pkte. 1. Sei a eine vorgegebene positive Konstante. Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z, die die Ungleichung

$$|z-a|+|z+a| \leq 2a$$

erfüllen. (Hinweis: geometrische Interpretation der Ungleichung)

4 Pkte. 2. Untersuchen Sie die rekursiv definierte Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_{n+1} = \sin a_n \;, \qquad n = 1, 2, 3, \dots \;,$$

für einen beliebigen festen Startwert $a_1 \in [0, \pi]$ auf Monotonie und Konvergenz. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

5 Pkte. 3. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Wenn die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergieren, dann konvergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

b) Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n = 0$ für ein festes $p > 0$ ist, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

5 Pkte. 4. Welche der folgenden Reihen konvergiert oder divergiert?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+1} \,, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n(n-1)}$$

3 Pkte. 5. Seien $[a, b]$ ein Intervall und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit

$$f(a) = g(a) \;, \qquad f(b) = g(b).$$

Beweisen Sie, dass es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = g'(x_0)$ gibt.

6 Pkte. 6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.

a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ ist, und berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Weisen Sie nach, dass $\lim_{x\to 0} f'(x)$ nicht existiert.

c) Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} f(x)$, sofern der Grenzwert existiert.