WS 2007/2008 21.12.2007

Testklausur Analysis I

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Bestimmen Sie die Lösungen der Ungleichungen
$$|x+4| < \big| -x + |x| \big| \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

2. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Ungleichung
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Geben Sie für die rekursiv definierte Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{2}$$
   (i) einen Startwert a_0 an, für den die Folge konvergiert (aber nicht konstant ist),
   (ii) einen Startwert a_0 an, für den die Folge divergiert.

   Begründen Sie Ihre Antwort, und bestimmen Sie im ersten Fall den Grenzwert der Folge.

4. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
   a) Wenn eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ gegen den Grenzwert a konvergiert, dann ist auch die Zahlenfolge $(|a_n|)_{n=1,2,\ldots}$ konvergent und hat den Grenzwert $|a|$.
   b) Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

5. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive Zahlenfolge mit $\lim_{n\to\infty} na_n = b$, deren Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $b = 0$ ist.

6. Welche der folgenden Reihen konvergiert oder divergiert?
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!}$$

7. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert bzw. divergiert die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e-1)^k}{e^k} z^k \; ?$$
   Geben Sie im Konvergenzbereich den Wert der Reihe an.

8. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in (a,b)$.
   Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $(x_0 - r, x_0 + r) \subset (a,b)$ gibt, in der $f(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ gilt.