Klausur Analysis 1

Name, Vorname:
Matrikelnummer:
Studienrichtung:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Soll-Punkte:	5	5	5	4	6	5	30
Ist-Punkte:							

Begründen Sie Ihre Antworten und Lösungen. Bearbeitungszeit: **120** Minuten

1. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

2. Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge (b_n) mit $0 < b_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   a) Untersuchen Sie die Folge (a_n) von Produkten mit

$$a_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz.

   b) Beweisen Sie: Hat (b_n) einen Grenzwert $b < 1$, dann ist (a_n) eine Nullfolge.

3. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad\qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \arctan x$.

   a) Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Funktion f.

   b) Begründen Sie mit Hilfe von a), dass f auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist.

5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + e^x$.

   a)Begründen Sie, dass f bijektiv ist.

   b) Berechnen Sie die erste Ableitung der Umkehrfunktion in $x = 1$.

6. Berechnen Sie

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-x} \sin x dx.$$