Klausur Analysis I

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

5 Pkte.

1. Bestimmen Sie die Lösungen der Ungleichungen

$$|x+2| - |x-2| \geq 2 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

4 Pkte.

2. Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n^2}\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

für jeden festen Startwert $a_1 \in \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, aber nicht nach oben beschränkt ist.

5 Pkte.

3. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   a) Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ konvergiert, dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   b) Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ konvergieren, dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

5 Pkte.

4. Welche der folgenden Reihen konvergiert oder divergiert?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4-1}{n^5+1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$$

3 Pkte.

5. Sei $[a,b]$ ein Intervall und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien zwei stetige Funktionen mit

$$f(a) > g(a)\,, \qquad f(b) < g(b).$$

Beweisen Sie, dass es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = g(x_0)$ gibt.

4 Pkte.

6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

   a) Zeigen Sie: Falls f differenzierbar ist für $x \neq 0$ und der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f'(x) = A$ existiert, dann ist f auch differenzierbar in $x = 0$ mit $f'(0) = A$.

   b) Belegen Sie durch ein Beispiel, dass die Umkehrung von a) i.a. nicht gilt; also dass f in $x = 0$ differenzierbar sein kann, obwohl der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f'(x)$ nicht existiert.