Naturwissenschaftliche Fakultät III
Institut für Mathematik

Prüfungsklausur Lineare Algebra 2008

Die Aufgaben sind so zu lösen, dass der Lösungsweg erkennbar ist. Falls eine Formel aus einer Formelsammlung benutzt wird, ist die Quelle anzugeben!

1. Lösen Sie folgendes Lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit dem Gaußschen Algorithmus:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 10x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ 9x_1 + x_2 - 32x_3 - 8x_4 &= 1 \\ -17x_1 - 8x_2 + 25x_3 + 9x_4 &= -8 \end{aligned}$$

Wie groß sind die Ränge von A und $\left(A, \vec{b}\right)$?

2. a) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichung:

$$z^2 + (1+i)\,z + 4 + \frac{i}{2} = 0$$

b) Berechnen Sie alle komplexen Wurzeln der Gleichung $z^3 + 27i = 0$! Geben Sie die Ergebnisse in arithmetischer Form an!

c) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$ und $z_2 = 2 + i$. Berechnen Sie $\frac{z_1}{z_2}$! Geben Sie das Ergebnis in arithmetischer Form an!

3. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Ungleichung:

$$\frac{1}{2x-4} \leq \frac{1}{3x+9}$$

4. Untersuchen Sie, ob das folgende Gebilde $[G, \circ]$ eine Gruppe ist. Geben Sie das neutrale Element und die inversen Elemente explizit an. Ist $[G, \circ]$ kommutativ?

$[G, \circ]$	x	y	z
x	x	y	z
y	y	z	x
z	z	x	y

Bitte wenden!!

5. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}, falls diese existiert!

6. Untersuchen Sie den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von $a, b \in R$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Lösen Sie folgende Matrixgleichung nach X auf. Nehmen Sie dabei an, dass alle Matrizen quadratische Matrizen gleichen Typs sind. Welche Bedingungen müssen außerdem erfüllt sein?

$$(A - B) \cdot X = -B \cdot X + C$$

8. Durch vollständige Induktion ist für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die folgende Formel zu beweisen:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

9. Gesucht ist die Gleichung derjenigen Geraden die durch P(- 2, 4) hindurchgeht und senkrecht auf der Verbindungsgeraden durch die Punkte A(1, 6) und B(5, -2) steht.