Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Optimierung und Stochastik

Prüfungsklausur Lineare Algebra 2005

1. Bestimmen Sie alle $x \in R$, die der folgenden Ungleichung genügen:

$$\frac{x^2 - 3x - 2}{1 - x} \geq 2x + 3$$

2 a) Berechnen Sie alle komplexen Wurzeln der Gleichung $z^3 + 27i = 0$! Geben Sie die Ergebnisse in arithmetischer Form an!

b) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$ und $z_2 = 2 + i$.

Berechnen Sie $\frac{z_1}{z_2}$! Geben Sie das Ergebnis in arithmetischer Form an!

3. Es sei Z die Menge der ganzen Zahlen. Man zeige, dass $[Z, \circ]$ eine Gruppe ist, wobei die Operation $\circ$ durch $a \circ b = a + b + 1,\ a, b \in Z$ gegeben ist. Ist diese Gruppe kommutativ?

4. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}!

5. Man untersuche für welche Werte von $a \in R$ und $b \in R$ das folgende lineare Gleichungssystem
i) eine eindeutige Lösung
ii) keine Lösung
iii) unendlich viele Lösungen
besitzt. Berechnen Sie für die Fälle i) und iii) die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Welche Aussage können Sie jeweils über die Ränge von einfacher Koeffizientenmatrix A und erweiterter Koeffizientenmatrix $(A, \vec{b})$ treffen?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 &= b \end{aligned}$$

b. w.

6. Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Ausdruck $M^3 + M^2 + M$!

7. Berechnen Sie die folgende Determinante möglichst vorteilhaft!

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & b & 1 & 0 \end{vmatrix}, a \in R$$

8. Bestimmen die Eigenwerte und alle Eigenvektoren der folgenden Matrix. (Achten Sie auf mehrfache Eigenwerte!)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$