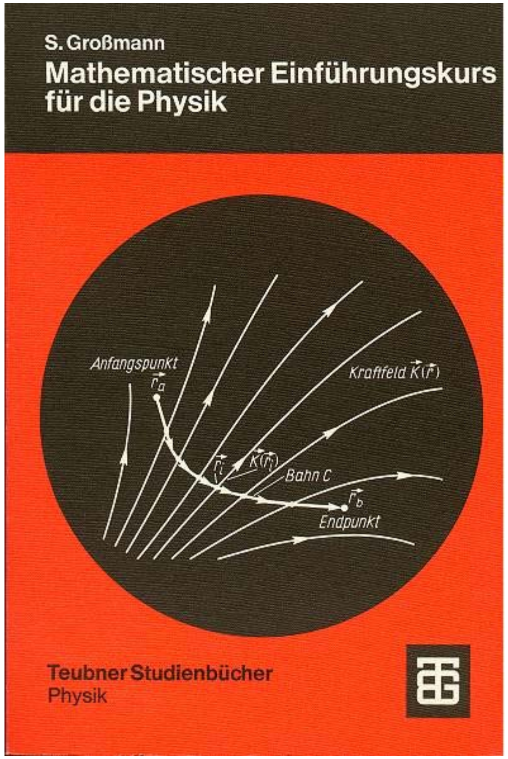
0. Mathematische Grundlagen

Literatur:

S. Großmann „Mathematischer Einführungskurs für die Physik"

Teubner Studienbücherei Physik 1991
ISBN 3-519-03074-8



Inhalt von Kap. 0:

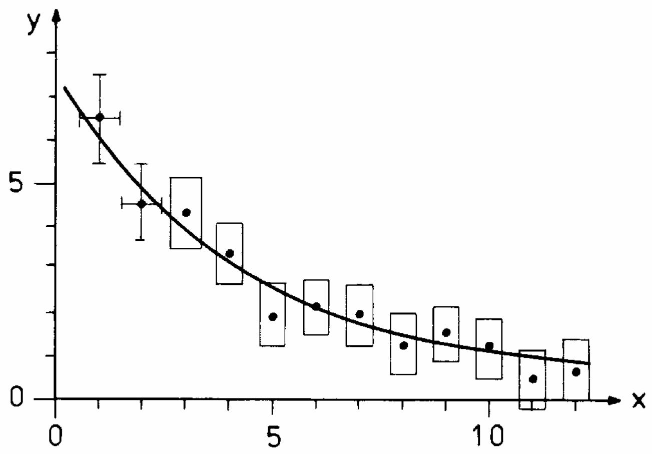
- Mathematische Beschreibung physikalischer Zusammenhänge
- Fehlerabschätzung und –fortpflanzung
- Vektoren
- wichtige Funktionen
- Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme
- quadratische Gleichungen
- Differential- und Integralrechnung

0.1 Mathematische Beschreibung physikalischer Zusammenhänge

- physikalische Experimente liefern oft einen funktionalen Zusammenhang: $y = f(x)$
- z.B. $\mathbf{F} = f(\mathbf{s})$ ... Kraft ist abhängig vom Ort
  oder $\mathbf{v} = f(t)$ ... Geschwindigkeit ist abhängig von der Zeit
- Darstellung als Wertepaare oder Graphik

x	y
$1{,}0 \pm 0{,}47$	$6{,}5 \pm 1{,}0$
$2{,}0 \pm 0{,}45$	$4{,}5 \pm 0{,}8$
$3{,}0 \pm 0{,}35$	$4{,}3 \pm 0{,}8$
$4{,}0 \pm 0{,}30$	$3{,}4 \pm 0{,}7$
$5{,}0 \pm 0{,}27$	$1{,}9 \pm 0{,}7$
$6{,}0 \pm 0{,}30$	$2{,}2 \pm 0{,}6$
$7{,}0 \pm 0{,}30$	$2{,}0 \pm 0{,}7$
$8{,}0 \pm 0{,}30$	$1{,}8 \pm 0{,}7$
$9{,}0 \pm 0{,}30$	$2{,}1 \pm 0{,}6$
$10{,}0 \pm 0{,}30$	$1{,}8 \pm 0{,}7$
$11{,}0 \pm 0{,}30$	$0{,}5 \pm 0{,}7$
$12{,}0 \pm 0{,}30$	$0{,}7 \pm 0{,}7$

a

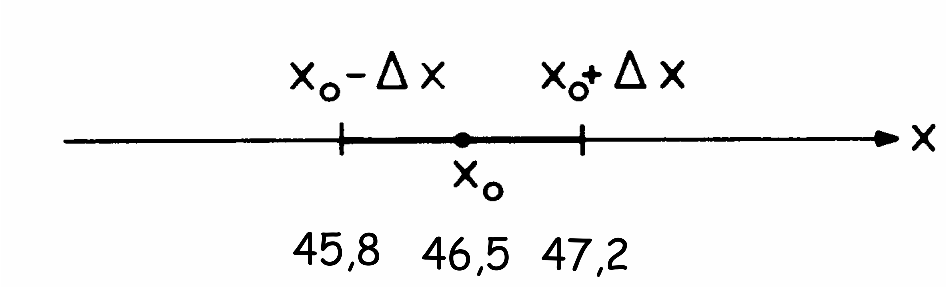


b

- jedes Experiment ist fehlerbehaftet: Fehlerbalken bzw. Fehlerkreuz
- Interpolationskurve verbindet Datenpunkte als glättende Darstellung
- Verbindung mit Geraden: keine Aussage zu Zwischenwerten
- lineare und nichtlineare Regression z.B. mit Programm ORIGIN

0.2 Fehlerabschätzung

- Bedeutung des Fehlerintervalls, bspw. $x = (46{,}5 \pm 0{,}7)$ cm

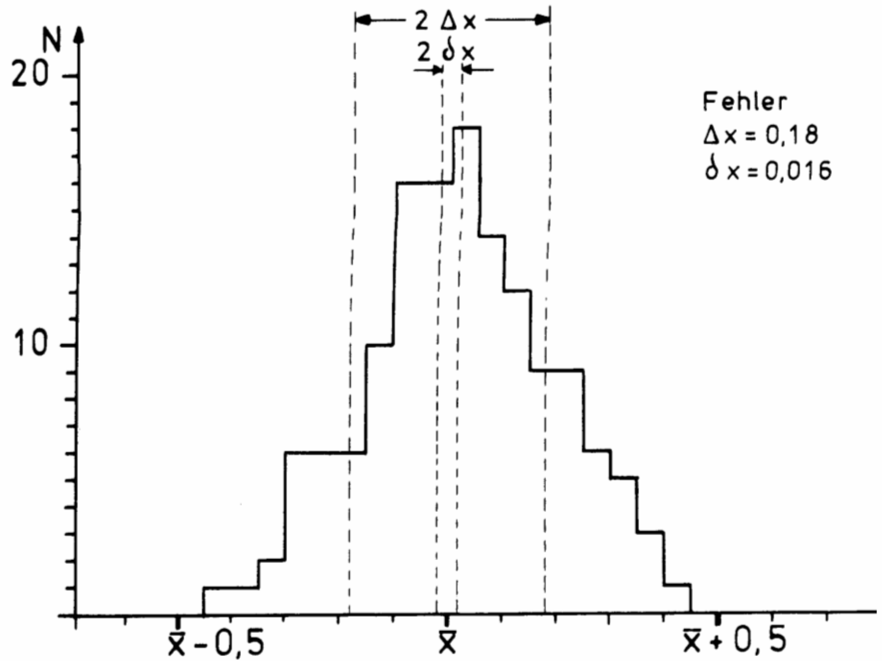


- falls nur statistische Fehler (Gauß-förmige Verteilung der Messwerte): Angabe der **Standardabweichung**
- für $\pm\Delta x$: ca. **68% aller Messwerte im angebenden Intervall** ($\pm 2\Delta x$: 95%)
- Standardabweichung wird häufig auch mit σ bezeichnet
- kann durch wiederholte Messung (n) desselben Messwertes x_i bestimmt werden

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots (x_n - \bar{x})^2$$

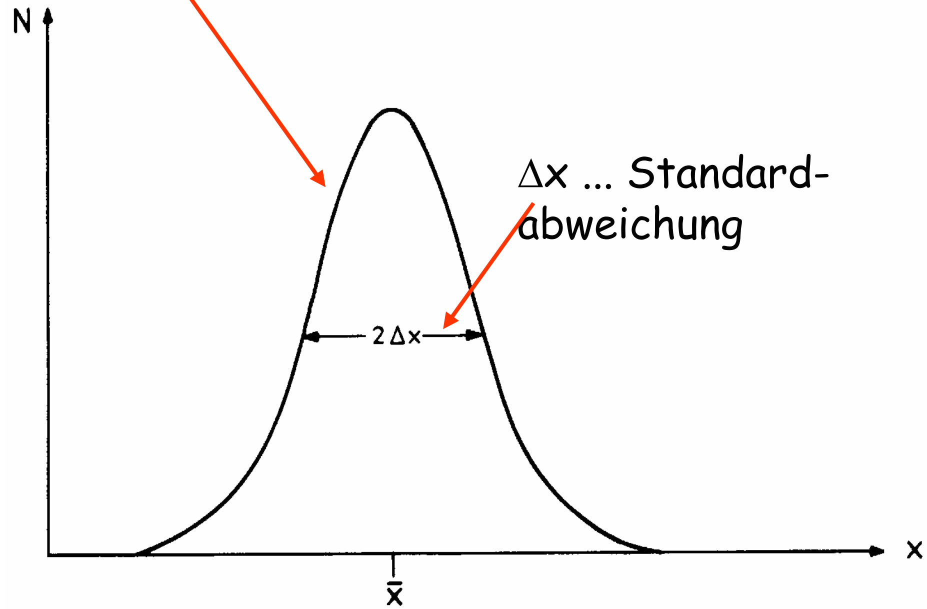
Standardabweichung

- wenn derselbe Messwert vielfach gemessen wird bei identischen Versuchsbedingungen, ergibt sich Verteilung um Mittelwert $\overline{x}$: Erwartungswert
- falls nur statistische Abweichungen: es ergibt sich für kleine Intervalle δx und große Versuchszahl n eine Gauß-Kurve



- wenn Zahl der Versuche $n \to \infty$ und $\delta x \to 0$: glatte Kurve
- ist Gauß-Kurve

Δx ... Standard-abweichung



weitere Fehler

- es existieren neben **statistischen Fehlern** (z.B. bedingt durch Ablesefehler) auch **systematische Fehler** (z.B. bedingt durch Ungenauigkeit des Messgerätes)
- Bsp: Zeigerinstrument zur Messung des Stromes mit Genauigkeitsklasse 2,5%
  - bedeutet: bei 100 Skalenteilen ist systematischer Fehler 2,5 Skalenteile
  - bei Messwert von 30 Skt. ist relativer Fehler $2{,}5/30 \approx 0.083$ (d.h. 8,3%)
- Achtung bei digitalen Geräten! Fehler im Handbuch nachschlagen. Kann erheblich größer als Digitalisierungsfehler sein (1 Digit in letzter Stelle)

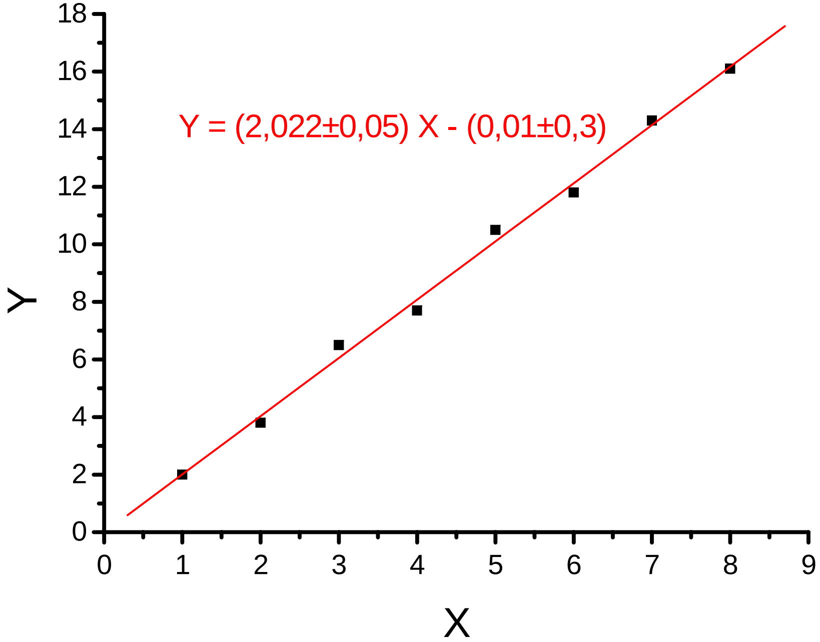
Fehlerfortpflanzung

- wenn physikalische Größe aus mehreren anderen berechnet wird $\Rightarrow$ Fehlerfortpflanzung beachten!
- **Bsp**: Berechnung der Geschwindigkeit aus Weg und Zeit: $v = s/t$
- Messung von s und t unabhängig voneinander; sind beide fehlerbehaftet
- **Produkt- und Quotientenregel**: falls zu berechnende Größe nur Funktion von Produkt bzw. Quotienten von Messgrößen, dann ist relativer Gesamtfehler Summe der relativen Einzelfehler $\Delta v/v = \Delta s/s + \Delta t/t$
- **Summen- und Differenzregel**: absoluter Gesamtfehler ist Summe der einzelnen Absolutfehler $y = 2x - 1{,}5z \quad \Rightarrow \quad \Delta y = 2\,\Delta x + 1{,}5\,\Delta z$

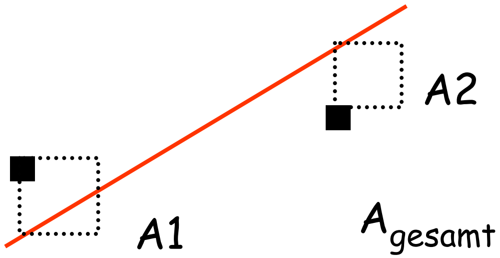
Lineare Regression

- häufig: linearer funktionaler Zusammenhang von Messgrößen, d.h. $y = mx + n$

x	y
1	2
2	3,8
3	6,5
4	7,7
5	10,5
6	11,8
7	14,3
8	16,1



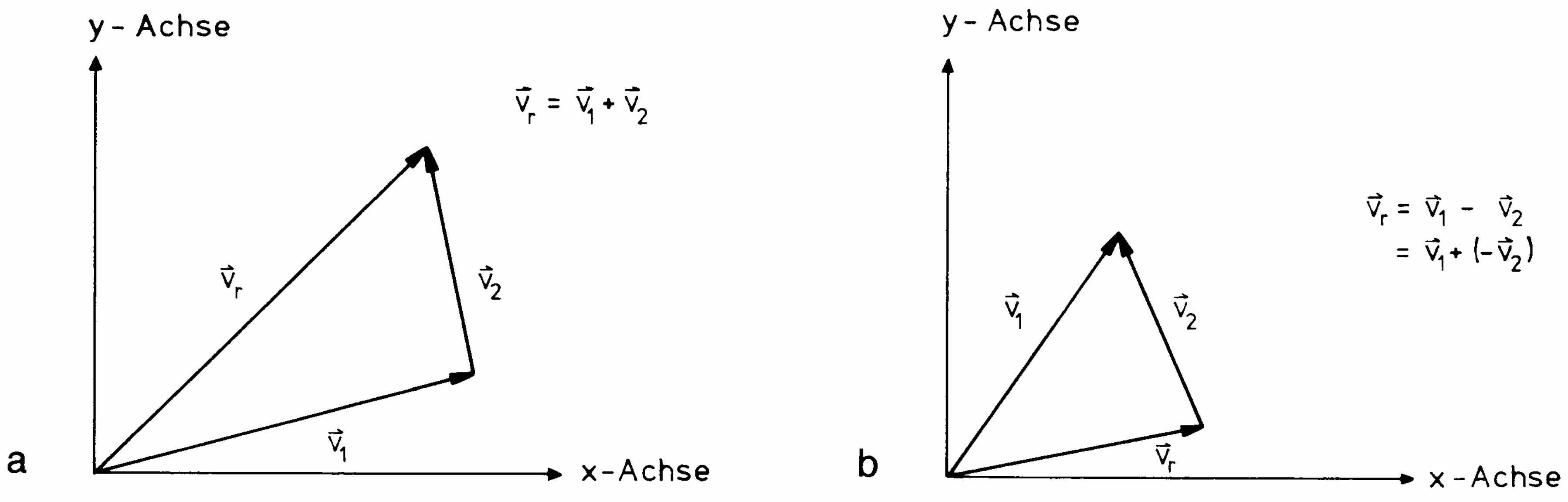
- Ausgleichsgerade wird mit Methode der kleinsten Quadrate bestimmt
- m und n werden so berechnet, dass **Summe der quadratischen Y-Abweichungen zum Minimum wird**



$A_{gesamt} = A1 + A2 + \ldots \Rightarrow$ Minimum

0.3 Vektoren

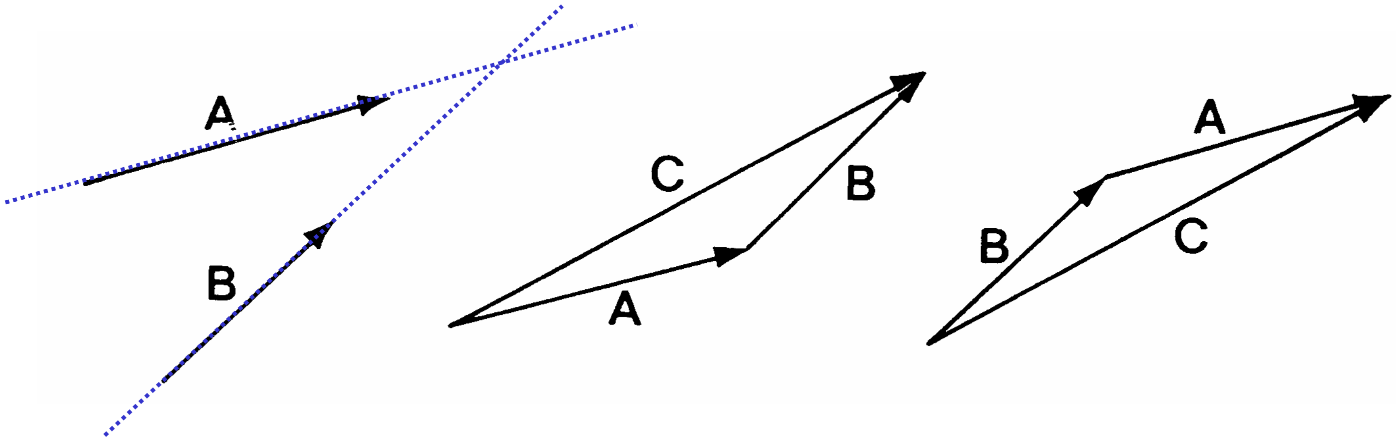
- in Physik existieren **skalare Größen** (ungerichtet): z.B. Dichte, Temperatur, Druck (werden durch reelle Zahlen beschrieben)
- und **gerichtete Größen**: Geschwindigkeit, Kraft, elektrische Feldstärke
- diese Größen werden durch **Vektoren** beschrieben und fett gedruckt (**v, F, E**) oder mit Pfeil versehen: $\vec{v}$, $\vec{F}$, $\vec{E}$
- werden durch Betrag **und** Richtung charakterisiert
- für Addition/Subtraktion können Vektoren entlang ihrer Richtung (Wirkungslinie) verschoben werden



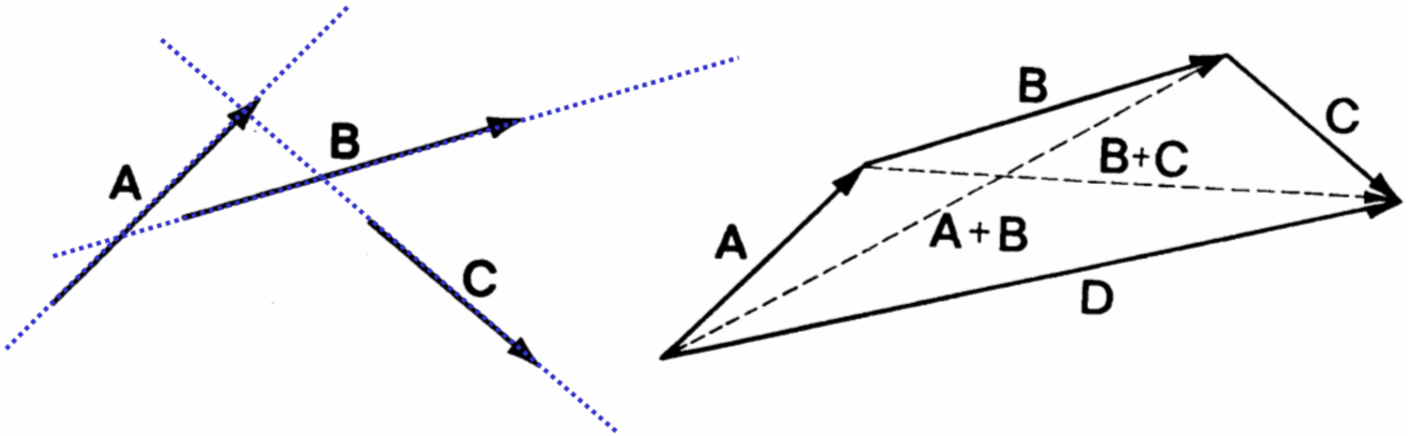
Addition (a) und Subtraktion (b) von Vektoren.

zur Addition von Vektoren

- zur Addition werden die Vektoren entlang ihrer Wirkungslinie verschoben

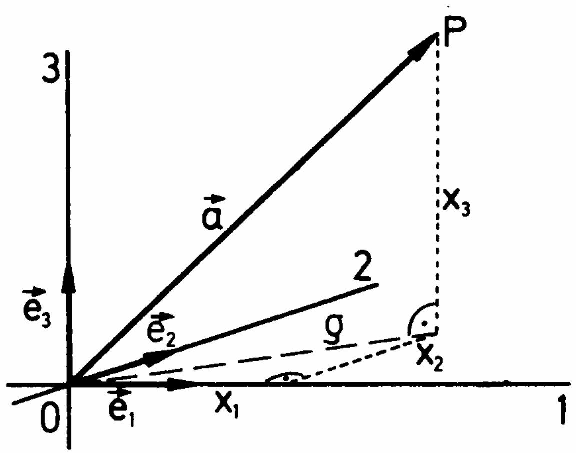


Beispiel: $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=\vec{D}$



Komponentenzerlegung von Vektoren

- entsprechend der Additivität von Vektoren kann ein Vektor im Raum in Komponenten zerlegt werden, die senkrecht aufeinander stehen
- $\vec{e_1}$ ... $\vec{e_3}$ sind Einheitsvektoren, d.h. bspw. $|\vec{e_1}| = 1$



Darstellung eines Koordinatensystems durch ein Dreibein von Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ sowie Komponentenzerlegung eines Vektors $\vec{a}$.

damit wird aus Vektor $\vec{a}$:

$$\vec{OP} = \vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

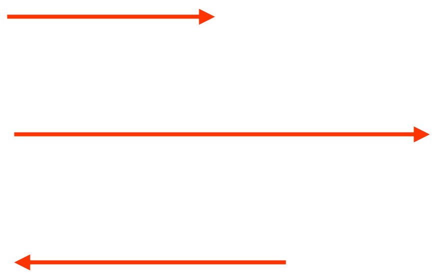
Multiplikation von Vektoren

- Multiplikation mit einem Skalar (reelle Zahl):

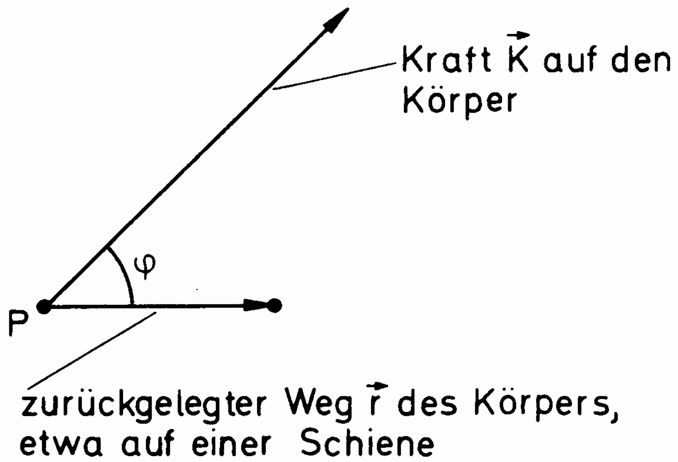
$\vec{a}$

$2\,\vec{a}$

$-1{,}5\,\vec{a}$



Das Skalarprodukt



Bewegung eines Körpers P unter dem Einfluß einer Kraft. Im dargestellten Fall „zieht“ die Kraft den Körper.

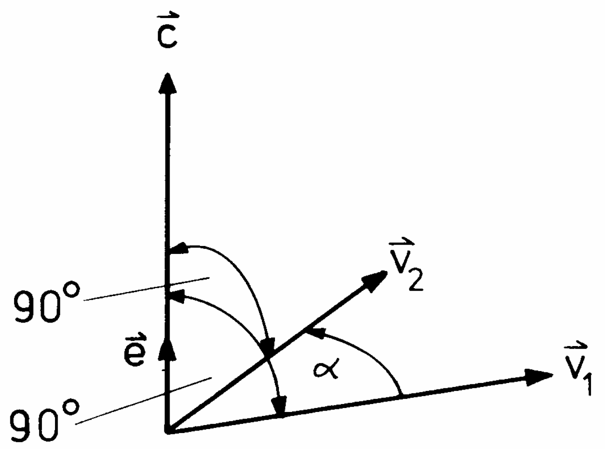
$$\vec{a} \cdot \vec{b} := a\, b \cos(\sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b})$$

$$\sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b} \equiv \text{Winkel zwischen Vektor } \vec{a} \text{ und Vektor } \vec{b}$$

- Ergebnis ist ein Skalar (eine Zahl)
- Rechenregel: Produkt beider Beträge mal Kosinus des eingeschlossenen Winkels
- Beispiel: Berechnung der mechanischen Arbeit

Das Vektorprodukt

- Das Vektorprodukt liefert als Ergebnis einen Vektor, der senkrecht auf beiden Ausgangsvektoren steht



Zum Vektorprodukt von Vektoren

$$\vec{c} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = |\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2| \sin\alpha\, \vec{e}.$$

Eigenschaften:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$

$$(\alpha\,\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\,\vec{b}) = \alpha\,(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

- **Rechenregel:** Betrag des resultierenden Vektors ist Produkt der Beträge der beiden Vektoren mal Sinus des eingeschlossenen Winkels
- Richtung des resultierenden Vektors: senkrecht auf beiden Ausgangsvektoren
- Vorzeichen: „rechte-Hand-Regel" oder „Schraubenregel"
- **Schraubenregel:** $\overrightarrow{v_1}$ wird mittels Rechtsschraube auf $\overrightarrow{v_2}$ gedreht, dann ist $\overrightarrow{e}$ in Richtung der Schraubenbewegung gerichtet (auch „Korkenzieherregel")
- Beispiel: Drehmoment bei Rotation als Äquivalent zur Kraft bei Translation

Übungsaufgaben zum Skalarprodukt

1. Man berechne

$$\vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \qquad \text{(Bild!)},$$

$$(2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3) \cdot (\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3)\,, \qquad (5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_3 + \vec{e}_2) \cdot (-\vec{e}_3 + 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2).$$

2. Gegeben seien die Vektoren $\vec{r}_1 = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ und $\vec{r}_2 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$. Zu bestimmen sei $|\vec{r}_1|$, $|\vec{r}_2|$, $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$, $|2\vec{r}_1 - 3\vec{r}_2|$, $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$.

Übungsaufgabe zum Vektorprodukt

1. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (-1, 2, -3)$ und $\vec{b} = (2, 3, 1)$. Man berechne $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{a}$ sowie $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$.

0.4 einige wichtige Funktionen

- trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen)

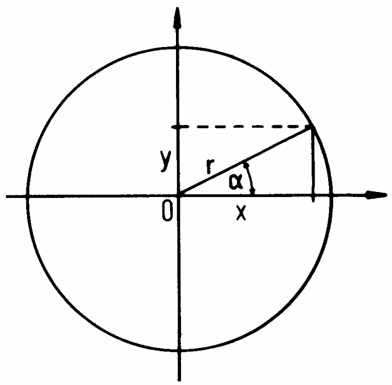
Definitionen am Kreis:

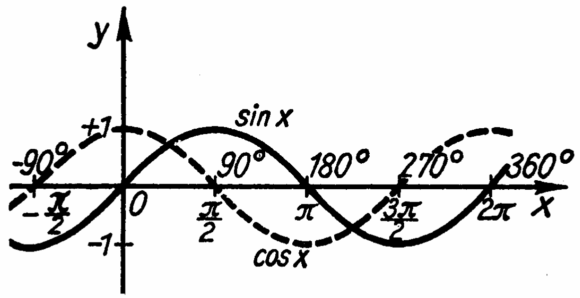
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

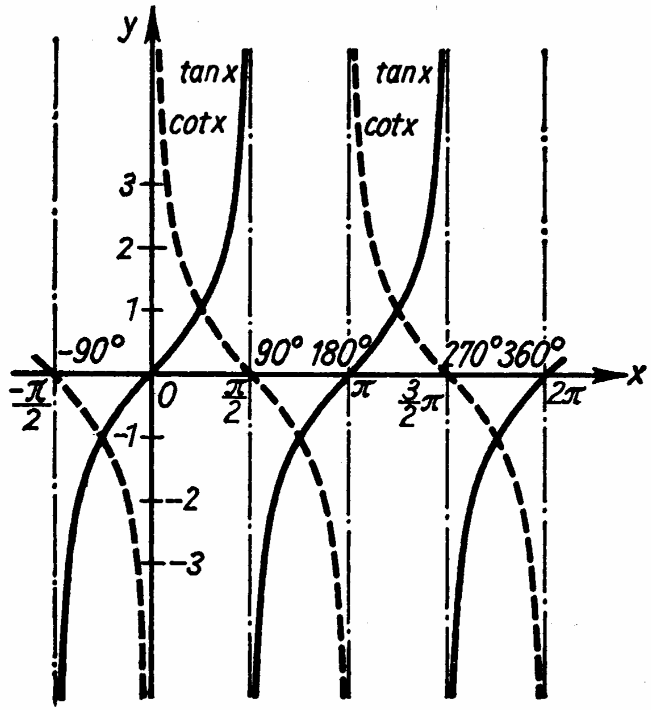
$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\text{cotan}\,\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$







- einige wichtige Beziehungen

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

- für kleine Winkel (< 5°) im Bogenmaß

$$\sin\alpha = \alpha$$

$$\tan\alpha = \alpha$$

Exponential- und Logarithmus-Funktion

- Exponentialfunktion ergibt sich, wenn Funktionswert sich immer um gleichen Faktor verändert

- z.B. $y=10^x$

x = 0	1	2	3	4
y = 1	10	100	1000	10000

- Beispiel: Entwicklung einer Bakterienkultur
  Verdopplung der Zahl nach Zeit t
  führt zum exponentiellen Anstieg

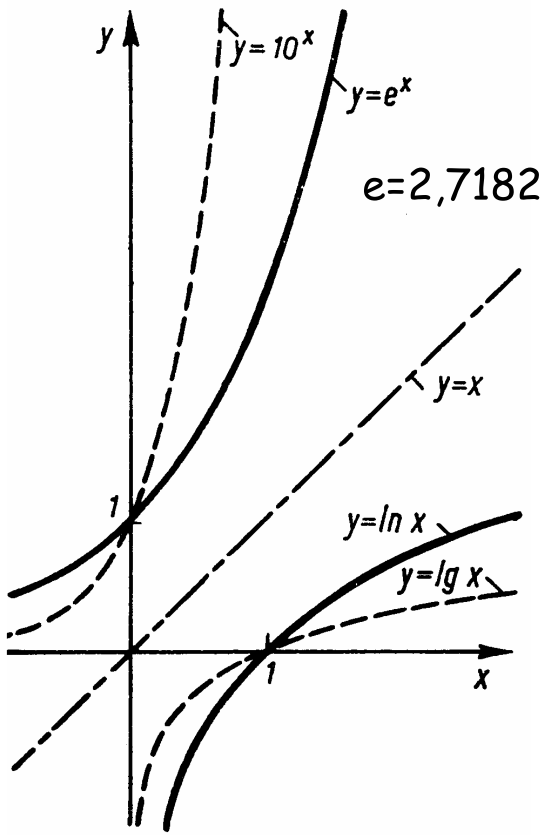
- einige Rechenregeln

$$a^n\, a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \quad a^o = 1$$

$$a^n\, b^n = (ab)^n, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}\,. \quad \text{Speziell: Quadratwurzel } a^{1/2} = \sqrt{a}$$

$$a^{1/n}\, b^{1/n} = (a\,b)^{1/n} = \sqrt[n]{a\,b}$$



e=2,71828...

0.5 Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme

- lineare Gleichungen löst man durch Umstellen nach der unbekannten Größe
- dabei bleibt Gleichheitszeichen wahr, wenn auf beiden Seiten dieselbe Rechenoperation ausgeführt wird (z.B. Grundrechenarten √ log exp)
- gilt auch für nichtlineare Gleichungen

$$ax + b = c \quad \Rightarrow \quad ax = c - b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{c-b}{a}$$

$$Ae^x = D \quad \Rightarrow \quad e^x = \frac{D}{A} \quad \Rightarrow \quad x = \ln\left(\frac{D}{A}\right)$$

- lineare Gleichungssysteme löst man bspw. mit dem Einsetzungsverfahren, d.h. man stellt eine Gleichung nach einer Unbekannten um und setzt den Ausdruck in eine andere Gleichung ein. Man reduziert so die Ordnung des Systems bis man eine lineare Gleichung erhält.

$$\begin{aligned} 3x + 7y &= 7 \\ 5x + 3y &= 36 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} y &= \frac{7-3x}{7} \\ 5x + 3\left(\frac{7-3x}{7}\right) &= 36 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = -10{,}5 \qquad y = 5{,}5}$$

0.6 quadratische Gleichungen

- sind Funktionen, bei denen die Unbekannte in linearen *und* quadratischen Termen auftritt
- allgemeine Form:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

Division durch A führt auf Normalform:

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{mit} \quad p = \frac{B}{A} \text{ und } q = \frac{C}{A}$$

Lösung:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

falls $(p/2)^2-q$ negativ: keine reelle Lösung

- Beispiel

$$6x^2 - 13x + 6 = 0$$

$$x^2 - \frac{13}{6}x + 1 = 0 \quad \text{(Normalform)}$$

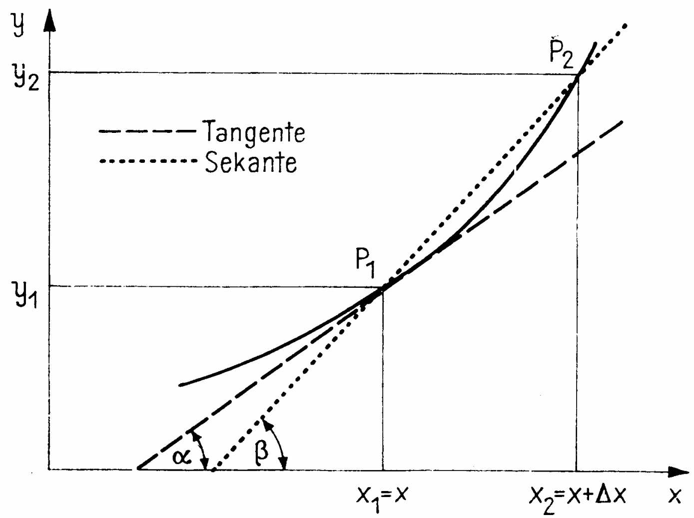
$$x_{2;3} = \frac{13}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{12}\right)^2 - 1} = \frac{13}{12} \pm \frac{5}{12}$$

$$\underline{\underline{x_2 = 1\frac{1}{2}}}; \qquad \underline{\underline{x_3 = \frac{2}{3}}}$$

0.7 Differentialrechnung

- Differenzenquotient beschreibt Anstieg eines Kurvenstückes

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



- Anstieg der Tangente an die Kurve ist der Differentialquotient, d.h. $\Delta x \to 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- wichtige Differentiationsregeln (u und v sind je eine Funktion von x):

$$\frac{\mathrm{d}\,Cu}{\mathrm{d}x} = C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad (C = \mathrm{const}),$$

(Faktorregel)

$$\frac{\mathrm{d}(u + v)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

(Summenregel)

$$\frac{\mathrm{d}(u \cdot v)}{\mathrm{d}x} = u\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

(Produktregel)

- Schreibweise: $y'(x) = dy/dx$
- Ableitung nach der Zeit oft: $dy/dt = \dot{y}$

Ableitung einiger wichtiger Funktionen

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x$$

$$\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = n x^{n-1} \quad (n \neq -1) \qquad \frac{\mathrm{d}\log_a x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x \qquad \frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x$$

- Beispiele:

1. $y = -9; \quad \underline{\underline{y' = 0}}$

2. $y = x^5 + x^2 - x^7; \quad \underline{\underline{y' = 5x^4 + 2x - 7x^6}}$

3. $y = (x^3 + a)(x^2 + 3b) \qquad x^3 + a = u; \quad u' = 3x^2$

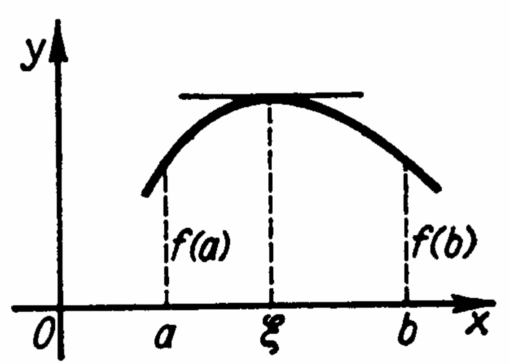
   $y' = 3x^2(x^2 + 3b) + \qquad x^2 + 3b = v; \quad v' = 2x$

   $\quad + (x^3 + a)\,2x$

   $\underline{\underline{y' = 5x^4 + 9bx^2 + 2ax}}$

Extremwertberechnung

- Extremwert einer Funktion (Maximum oder Minimum) immer dort, wo Anstieg der Tangente = 0 ist, d.h. dort, wo 1. Ableitung = 0 ist

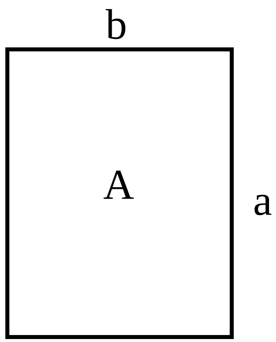


- Extremwertbedingung also:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) = 0$$

- **Beispiel 1:** lineare Regression (s. oben)

- **Beispiel 2:** Bei welchem Seitenverhältnis ist Fläche eines Rechtecks A bei gegebenem Umfang U maximal?



$$A = a \cdot b \quad (1)$$

$$U = 2a + 2b \Rightarrow a = \frac{1}{2}U - b \quad \text{einsetzen in (1)} \quad \Rightarrow A = \frac{1}{2}Ub - \mathrm{b}^2$$

$$\text{Maximalwert:} \quad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}b} = \frac{1}{2}U - 2b \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}U = 2b \quad \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{4}U \text{ und } a = \frac{1}{4}U \quad \text{ist ein Quadrat}}$$

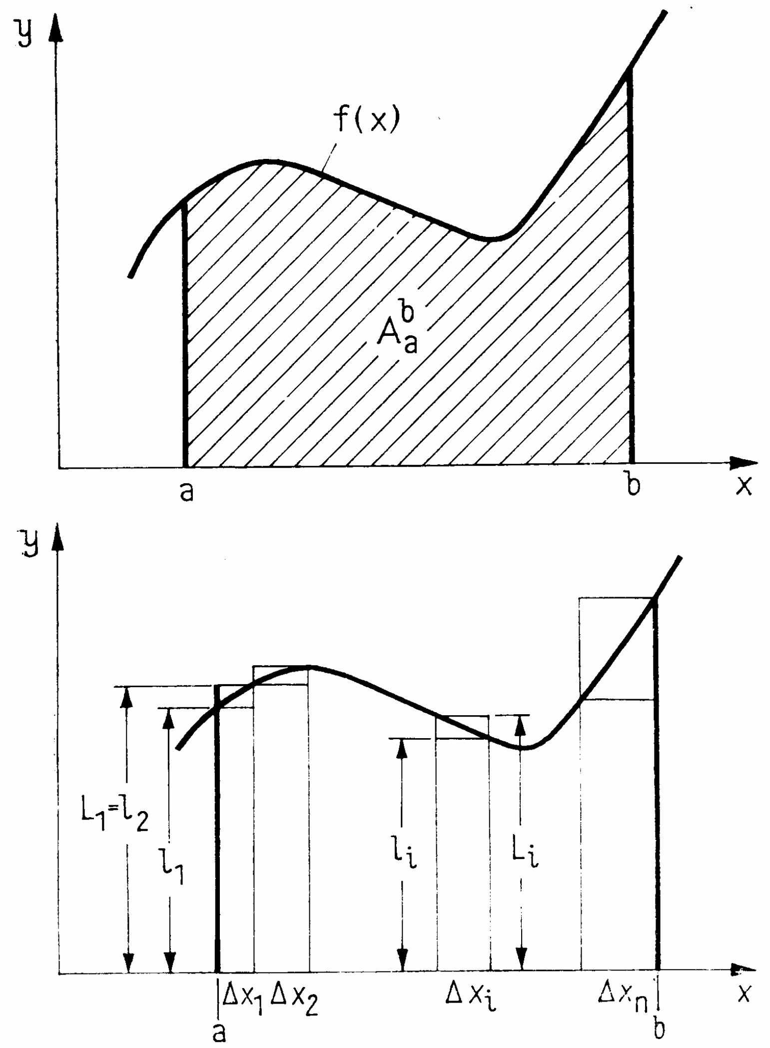
0.8 Integralrechnung

- Bsp: Flächeninhalt unter Kurve ist verrichtete Arbeit, wenn Kraft als Funktion des Weges aufgetragen wird
- Flächeninhalt als Summe der Flächen von rechteckigen Streifen anzunähern
- exakte Lösung, wenn $\Delta x \to 0$
- Grenzwert ist **bestimmtes Integral**
- bestimmtes Integral entspricht einer Zahl
- **unbestimmtes Integral** hat keine Integrationsgrenzen und ist eine Funktion (heißt **Stammfunktion**)
- ist „Umkehrung" der Differentiation
- Beispiel:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

zur Probe - Differentiation:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right) = x^2$$



$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} l_i \Delta x_i = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} L_i \Delta x_i = A_a^b = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Grundintegrale

1. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \in R \setminus \{-1\}$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad x \neq 0$
3. $\int e^x \, dx = e^x + C$
4. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C = a^x \log_a e + C \qquad a > 0, \; a \neq 1$
5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

- Berechnung des bestimmten Integrals aus Stammfunktion F(x):

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

bestimmtes Integral zwischen a und b :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Rechenregeln:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

- Beispiel:

$$\int_1^3 (2x + 3x^2)\,dx = (x^2 + x^3)\Big|_1^3$$

$$= (9 + 27) - (1 + 1) = \underline{\underline{34}}$$

Übungsaufgaben zu bestimmten Integralen

Man berechne die Integrale

a) $\int_0^2 x^3 dx$ b) $\int_0^\pi \cos t \, dt$ c) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

d) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$ e) $\int_0^{2\pi} \sin t \, dt$ f) $\int_0^\pi \sin t \, dt$

g) $\int_0^1 e^\xi d\xi$ h) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

0.9 Differentialgleichungen

- betrachten: radioaktiven Zerfall von Uran $\Rightarrow$ ständig Zerfall von Atomen
- Zahl der Zerfälle nimmt mit der Zeit ab (**Halbwertzeit**: Hälfte zerfallen)
- N(t) ist Zahl der nichtzerfallenen Kerne zur Zeit t
- im Zeitraum Δt zerfallen ΔN Kerne: $\Delta N(t) = -\lambda\, N(t)\, \Delta t$ (λ ... Zerfallsrate)
- Minuszeichen, da Zahl abnimmt mit fortschreitender Zeit
- für $\Delta t \to 0$ schreibt man die Differentialgleichung:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

- in solchen einfachen Fällen kann man die Differentialgleichung durch das Verfahren der „**Trennung der Variablen**" lösen:

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda dt \quad \text{Integration auf beiden Seiten liefert:}$$

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda \int dt \Rightarrow \ln N(t) = -\lambda t + C \Rightarrow N(t) = e^{-\lambda t + C} = e^{C} e^{-\lambda t} = C^{*} e^{-\lambda t}$$

Anfangsbedingung: bei $t = 0$ sind N_0 Kerne vorhanden $\Rightarrow C^{*} = N_0$

$$\boxed{N(t) = N_0 \quad e^{-\lambda t}} \quad \text{(ist bekanntes Zerfallsgesetz für radioaktive Isotope)}$$